

Études de relaxations dans le modèle du tas de sable sur la grille 2D

Rapport de stage

Henri Derycke

16 juin 2015

1 Introduction

Un tas de sable est un graphe muni d'une distribution de grains sur les sommets appelée *configuration*. On dit qu'un sommet du graphe est instable s'il possède au moins autant de grains que de voisins et est stable dans le cas contraire. L'opération atomique sur une configuration dans le modèle du tas de sable est l'*éboulement* d'un sommet. Il s'agit pour un sommet du graphe de donner un grain à chacun de ses voisins. On parle d'*éboulement légal* lorsque que le sommet est *instable*. On définit également l'*anti-éboulement* d'un sommet comme l'action d'ébouler tous les sommets sauf celui-ci. Si le graphe est connexe infini et possède un nombre fini de grain, alors tous les sommets peuvent devenir stable après un nombre fini d'écroulements. Une propriété centrale est que la configuration finale ne dépend pas de l'ordre des écroulements. Il est possible d'équiper le graphe d'un sommet particulier appelé *puits* qui est considéré alors comme stable. À l'aide de ses écroulements on peut définir le processus de *stabilisation* d'une configuration par une séquence d'écroulements légaux aboutissant à une configuration stable (c-à-d sans sommet instable). Dans un graphe fini, le puits assure que la stabilisation termine en nombre fini d'écroulements.

On définit également le *support* d'une séquence d'écroulements légaux comme l'ensemble des sommets écroulés.

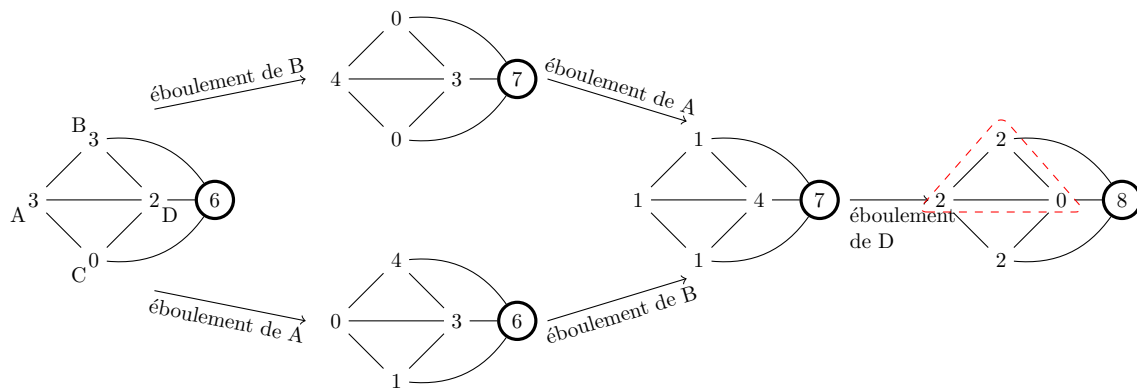


FIGURE 1 – Stabilisation d'une configuration dans le modèle du tas de sable et support de l'écroulement

De nombreux résultats existent sur les graphes finis. Lors de ce stage, l'étude a été portée sur le cas de la grille qui est un graphe infini. D'une part on s'est intéressé à un cas particulier de configuration de la grille pour déterminer précisément l'écroulement sur ce type d'objets. D'autre part on s'est intéressé à une possible généralisation d'une définition de groupe du tas de sable existante sur les graphes finis à la grille 2D.

2 Écroulement de la grille

L'objectif de cette partie est de tenter de décrire la stabilisation d'une configuration instable de la grille \mathbb{Z}^2 . On s'intéresse tout d'abord à l'éboulement de la *pile de sable*. Il s'agit de la configuration $0^{\mathbb{Z}^2}$ à laquelle on rajoute n grain à l'origine $(0, 0)$. (Figure 2)

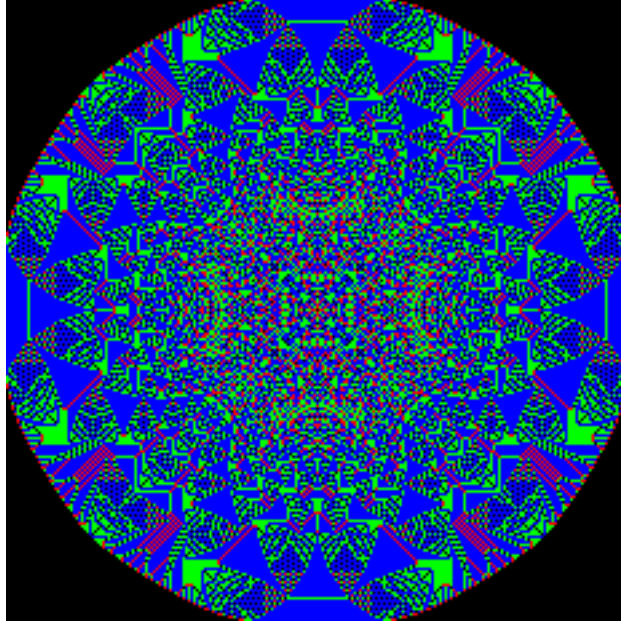


FIGURE 2 – Pile de sable pour $n = 100000$. Code couleur : noir pour 0 grain, rouge pour 1 grain, vert pour 2 grains, bleu pour 3 grains

Cette configuration se stabilise et son stabilisé peut être décrit assez précisément mais ce n'est pas le cas pour l'éboulement. On peut retrouver ces descriptions dans les travaux de Pegden, Smart, Levine [5], Paoletti [7] et Sportiello [3]

2.1 Simplification vers une relaxation rectangulaire

On part ici d'une configuration où chaque sommet ne contient que 2 ou 3 grains. On rend instable l'origine en la complétant à 4 grains et on éboule. On appellera *une vague* une séquence d'éboulement légaux où chaque sommet apparaît au plus une fois. Alors la stabilisation peut être décrite comme une suite de vagues d'éboulement rectangulaires imbriquées les unes dans les autres où une vague d'éboulement est un ensemble de sommet ne s'ébouillant qu'une seule fois. (Figure 3). Une vague n'est dans le cas général pas rectangulaire.

Proposition 1. *La stabilisation se fait par vague de rectangles imbriqués les uns dans les autres. Une vague s'arrête seulement si elle rencontre un cadre de 2.*

Ici, le support de la stabilisation est alors le support de la première vague. On pourra donc par la suite s'intéresser au support de la première vague.

Pour un rectangle éboulé, on appellera *frontière* l'ensemble des sommets adjacents à l'un de ses cotés, *segment* une frontière précédemment éboulée, *coin* un coin extérieur du rectangle.

Démonstration. On montre le résultat par induction sur la taille du rectangle atteint par une vague.

Initialisation Si les voisins de l'origine ne contiennent que 2 grains chacun, alors seule l'origine s'écroule (rectangle de taille 1×1)

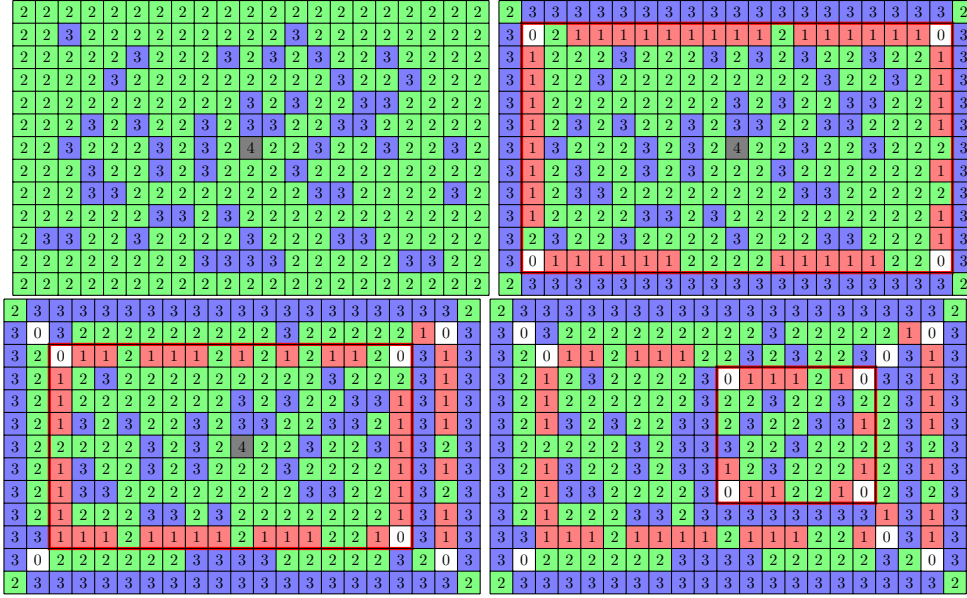


FIGURE 3 – Stabilisation par vague d’une configuration. Chaque vague est indiquée par les cadres rouges après éboulement

Hérédité On suppose que la vague atteint un rectangle de taille $i \times j$. Alors les sommets voisins des cotés du rectangle ont tous gagné un grain donc en contiennent maintenant au moins 3. Donc si un sommet en contenait 3, il devient instable, s’écroule et entraîne l’écroulement de toute la frontière qui le contient. La vague atteint donc le rectangle $i + 1 \times j$ ou $i \times j + 1$. Sinon, la vague s’arrête et les sommets de son coté ont tous perdu au moins un grain, donc n’ont au plus que 2 grains chacun sauf l’origine si elle se trouve sur un coté qui en contient moins de 3. Dans ce cas, elle devient stable et la configuration obtenue est stable. Sinon, elle contient 4 grains et on peut écrouler une autre vague. Et d’après l’induction, cette vague sera imbriquée dans la précédente. \square

Remarque. Une vague est une union disjointe de segment.

Si on se place dans l’ensemble de ces configurations, on munit cet ensemble d’une loi de probabilité. Chaque sommet de la grille suit indépendamment une Bernoulli de paramètre q sur $\{2, 3\}$ ($\mathbb{P}[c_{i,j} = 2] = q$). On s’intéresse alors la probabilité que le support de l’écroulement d’une configuration soit un rectangle de taille $m \times n$.

2.2 Mise en équation

Pour déterminer cette probabilité, un algorithme d’éboulement est suffisant. Comme on sait que la première vague d’éboulements est un rectangle, cette algorithme va ébouler en maintenant un support rectangle. Pour cela, si l’algorithme peut ébouler un sommet d’une frontière du rectangle, la frontière est éboulée et devient un segment. Par conséquent, il suffit de connaître la suite des sommets déclencheurs pour décrire intégralement la stabilisation de la grille. On appellera une telle suite un *certificat*.

On peut mettre en équation une telle probabilité en exprimant la probabilité d’obtenir un support de taille $m \times n$ en fonction de la probabilité d’obtenir un rectangle plus petit.

Cet algorithme essaie d’ébouler frontière par frontière en choisissant à chaque étape l’ordre des frontières à tenter d’ébouler. Chaque frontière possède alors deux états. Soit elle peut être éboulée, soit elle ne peut pas l’être. Pour bien déterminer la probabilité, on va s’intéresser à la probabilité que le support contienne un rectangle de taille $m \times n$. Cette probabilité peut s’exprimer en fonction des probabilités que le support

contienne un rectangle strictement inclus dans un rectangle $m \times n$ et de la probabilité de pouvoir ébouler les frontières et les coins. On obtient une équation à 16 termes.

2.3 Cas des symétries $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ et $x = -y$

Supposons que la distribution des grains est symétriques selon les axes et les bissectrices. Alors, si on peut ébouler sur un coté, on peut sur tous. De plus, il suffit de ne regarder que la moitié d'un coté. On peut donc ramener l'étude à un octant du plan.

Algorithm 1 Éboulement avec toutes les symétries

```

1:  $Q \leftarrow$  certificat vide
2:  $i, j \leftarrow 0$ 
3: while  $j \leq i$  do
4:   if  $c_{i+1,j} = 2$  then
5:      $j \leftarrow j + 1$ 
6:   else
7:      $Q \leftarrow Q \cup \{(i + 1, j)\}$ 
8:      $i \leftarrow i + 1$ 
9:      $j \leftarrow 0$ 
10:  end if
11: end while

```

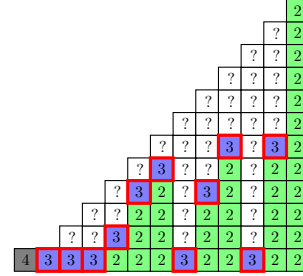


FIGURE 4 – Exemple de parcours de l’algorithme et certificat associé encadré en rouge

Pour atteindre un support de taille $2n + 1 \times 2n + 1$, le certificat doit contenir au moins n éléments de l’octant de l’étude. Or ce certificat est de la forme $\{(1, j_0), (2, j_1), \dots, (i + 1, j_i), \dots\}$ où les j_i vérifient $0 \leq j_i \leq i$. Il y a donc $n!$ certificat de taille n . On peut voir naturellement une bijection entre ces certificats et les permutations de $\{1 \dots n\}$.

La probabilité d’obtenir un certificat de taille n est alors :

$$q^{n+1} \prod_{i=1}^n (1 - q^i)$$

Or le q -analogue du nombre de permutations pour la statistique des inversions est :

$$D_n^* = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{I(\sigma)} = \prod_{i=1}^n (1 + q + \dots + q^{i-1})$$

Donc on a :

$$\mathbb{P}[|\text{certificat}| = n] = q^{n+1} (1 - q)^n D_n^*$$

Cette égalité motive la recherche de lien entre les éboulements et les permutations.

On va maintenant généraliser peu à peu en retirant des symétries.

2.4 Cas des symétries $x = y$ et $x = -y$

Dans ce cas, on ramène l’étude à un quadrant du plan entre deux bissectrices. Cette fois-ci le certificat restreint au quadrant est de la forme $\{(1, j_0), (2, j_1), \dots, (i + 1, j_i), \dots\}$ où les j_i vérifient $-i \leq j_i \leq i$. Il y a donc $(2n - 1)!!$ certificat de taille n . La probabilité d’obtenir un certificat de taille n est :

$$q^{2n+1} \prod_{i=1}^n (1 - q^{2i-1})$$

On s’intéresse alors à un sous-ensemble de permutations dont le cardinal est $(2n - 1)!!$. Ce sous-ensemble nous est donné par OEIS[8]. Il s’agit de des involutions sans point fixe de $\{1 \dots 2n\}$. Notons \mathcal{I}_n cette ensemble.

Posons le polynôme $D_n^\times = \prod_{i=1}^n \frac{1-X^{2i-1}}{1-X}$. La probabilité d'obtenir un certificat de taille supérieur à n est donc $q^{2n+1}(1-q)^n D_n(q)$

Proposition 2. Soit $Q_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_n} X^{I(\sigma)}$. Alors on a :

$$Q_n = X^n D_n^\times(X^2)$$

Démonstration. On se propose de montrer ce résultat par récurrence sur n . On rappelle que les permutations involutives sans point fixe de \mathcal{S}_{2n} sont les produits de n transpositions disjointes.

Initialisation : Pour $n = 1$, il n'y qu'une permutation involutive sans point fixe, la transposition $(1\ 2)$. Donc $Q_1 = X$

Hérédité : Soit $n > 1$. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$. On va construire à partir des involutions sans point fixe de \mathcal{S}_{2n-2} les involutions sans point fixe de \mathcal{S}_{2n} . On considère une permutation σ de \mathcal{I}_{n-1} . On peut l'écrire comme produit de $n - 1$ transpositions disjointes : $\sigma = \prod_{i=1}^{n-1} (u_i\ v_i)$. Pour tout k dans $\{1, \dots, 2n - 1\}$, on construit la permutation $\sigma_k = \prod_{i=1}^{n-1} (u'_i\ v'_i) \cdot (k\ 2n)$ où pour tout i , $u'_i = u_i$ si $u_i < k$ et $u'_i = u_i + 1$ sinon, et $v'_i = v_i$ si $v_i < k$ et $v'_i = v_i + 1$ sinon.

Alors pour tout k , σ_k est un produit de n transpositions à support disjoint, donc σ_k est une permutation involutive sans point fixe. De plus l'application $(\sigma, k) \mapsto \sigma_k$ est bijective de $\mathcal{I}_{n-1} \times \{1, \dots, 2n - 1\}$ dans \mathcal{I}_n .

On en déduit que $|\mathcal{I}_n| = (2n - 1)|\mathcal{I}_{n-1}| = (2n - 1)!!$

On a également la relation suivante :

$$Q_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_n} X^{I(\sigma)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{n-1}} \sum_{k=1}^{2n-1} X^{I(\sigma_k)}$$

On va donc exprimer $I(\sigma_k)$ en fonction de $I(\sigma)$, k et n . En modifiant les transpositions, on ne crée pas d'inversion. Les nouvelles inversions sont créées par l'ajout de la transposition $(k\ 2n)$. On a 1 nouvelle inversion $(2n, k)$, $2n - k - 1$ nouvelles inversions de la forme (j, k) pour $j \in \{k + 1, \dots, 2n - 1\}$ et $2n - k - 1$ nouvelles inversions de la forme $(2n, \sigma(j) + 1)$ pour $j \in \{k + 1, \dots, 2n - 1\}$. Donc $I(\sigma_k) = I(\sigma) + 2(2n - k) - 1$. D'où :

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{n-1}} \sum_{k=1}^{2n-1} X^{I(\sigma)} X^{2(2n-k)-1} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{n-1}} X^{I(\sigma)} \sum_{k=1}^{2n-1} X^{2(2n-k)-1} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{n-1}} X^{I(\sigma)} \right) X \frac{1 - X^{2(2n-1)}}{1 - X^2} \\ &= Q_{n-1} X \frac{1 - X^{2(2n-1)}}{1 - X^2} \\ Q_n &= \left(X^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - X^{2(2k-1)}}{1 - X^2} \right) X \frac{1 - X^{2(2n-1)}}{1 - X^2} \\ Q_n &= X^n \prod_{k=1}^n \frac{1 - X^{2(2k-1)}}{1 - X^2} \\ &= X^n D_n^\times(X^2) \end{aligned}$$

□

La preuve donne également la construction d'une bijection entre les certificats de taille n et les permutations de \mathcal{I}_n en utilisant $k = j_i - i + 1$.

2.5 Cas de la symétrie $x = -y$

Dans ce cas, on ramène l'étude à un demi-plan. Bien que le support d'éroulement soit un carré, l'algorithme d'éboulement doit parcourir deux cotés différents et donc peut adopter différentes stratégies d'éboulement. On va donc retenir l'état vue ou non vue des côtés.

Algorithm 2 Éboulement avec les symétries $x = -y$

```

1:  $Q \leftarrow$  certificat vide
2:  $i, j \leftarrow 0$ 
3: while une frontière peut être éboulée do
4:   if la frontière Nord peut être éboulée then
5:      $k \leftarrow$  le plus petit indice tel que  $c_{k,j+1} = 3$ 
6:      $Q \leftarrow Q \cup \{(k, j+1)\}$ 
7:      $j \leftarrow j+1$ 
8:     continue
9:   end if
10:  if la frontière Est peut être éboulée then
11:     $k \leftarrow$  le plus petit indice tel que  $c_{i+1,k} = 3$ 
12:     $Q \leftarrow Q \cup \{(i+1, k)\}$ 
13:     $i \leftarrow i+1$ 
14:    if le coin Nord-Est peut être éboulé then
15:       $Q \leftarrow Q \cup \{(i, j+1)\}$ 
16:       $j \leftarrow j+1$ 
17:    end if
18:    continue
19:  end if
20: end while

```

Cette fois-ci, le certificat est plus compliqué à décrire. Néanmoins on peut les compter de manière algorithmique.

On va introduire deux probabilités

- $A_{i,j}$ la probabilité que le carré $(-j, -i)(i, j)$ soit atteint à une étape de l'algorithme et on ne sait rien sur la frontière supérieure.

On est dans cet état si on satisfait le test à la ligne 4.

- $B_{i,j}$ la probabilité que le carré $(-j, -i)(i, j)$ soit atteint à une étape de l'algorithme et on sait que la frontière supérieure ne contient que des 2.

On est dans cet état si on satisfait le test à la ligne 10.

Depuis un carré $(-j, -i)(i, j)$, si on ne sait rien de la frontière supérieure, on a alors une probabilité $(1 - q^{i+j+1})$ de pouvoir ébouler cette frontière et on obtient un carré $(-j-1, -i)(i, j+1)$, et une probabilité q^{i+j+1} de ne pas pouvoir ébouler cette frontière, donc elle ne contient que des 2.

Depuis un carré $(-j, -i)(i, j)$, si on sait que la frontière supérieure ne contient que des 2, on a alors une probabilité $(1 - q^{i+j+1})q$ de pouvoir ébouler frontière Est sans pouvoir ébouler le coin, on obtient un carré $(-j, -i-1)(i+1, j)$, et une probabilité $(1 - q^{i+j+1})(1 - q)$ de pouvoir ébouler la frontière Est, et de pouvoir ébouler le coin et donc la frontière supérieur, on obtient alors un carré $(-j-1, -i-1)(i+1, j+1)$.

Alors on a les formules suivantes :

$$A_{i,j} = (1 - q^{i+j})A_{i,j-1} + (1 - q^{i+j-1})(1 - q)B_{i-1,j-1}$$

$$B_{i,j} = q(1 - q^{i+j})B_{i-1,j} + q^{i+j+1}A_{i,j}$$

où A et B sont nuls si i ou j est négatif strictement et $A_{0,0} = 1$ et $B_{0,0} = q$

Posons les séries génératrices $P_A = P_A(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} A_{i,j}x^i y^j$ et $P_B = \sum_{i,j \geq 0} B_{i,j}x^i y^j$. On a alors :

$$P_A = 1 + yP_A - qyP_A(qx, qy) + (1 - q)xyP_B - (1 - q)xyqP_B(qx, qy) \quad (1)$$

$$P_B = qxP_B - q^2xP_B(qx, qy) + qP_A(qx, qy) \quad (2)$$

En calculant la somme de l'équation (1) et de l'équation (2) multiplié par y , on élimine le terme en $P_A(qx, qy)$ et en isolant P_A on obtient :

$$P_A = \frac{1}{1-y}(1 - yP_B + xyP_B - xyqP_B(qx, qy)) \quad (3)$$

On peut maintenant éliminer $P_A(qx, qy)$ de (2) en substituant x par qx et y par qy dans l'équation (3). En multipliant les membres de l'équation par $1 - qy$ puis en isolant le terme P_B on a alors :

$$P_B = q + q(x+y)P_B - q^2xyP_B - q^2(x+y)P_B(qx, qy) + 2q^3xyP_B(qx, qy) - q^4xyP_B(q^2x, q^2y)$$

Soit $C_n = q^{n+1} \sum_{i=0}^n B_{i, n-i}$ la probabilité que le support soit de taille $n+1$. Alors sa série génératrice $P_C(x)$ est égale à $qP_B(qx, qx)$. Donc :

$$P_C = q^2 + 2q^2xP_C - q^4x^2P_C - 2q^3xP_C(qx) + 2q^5x^2P_C(qx) - q^6x^2P_C(q^2x)$$

En extrayant le coefficient du monôme de degré n de cette équation on a :

$$C_n = 2q^2(1 - q^n)C_{n-1} - q^2(q(1 - q^{n-1}))^2C_{n-2}$$

où $C_0 = q^2$ et $C_1 = 2q^4(1 - q)$.

Comme l'événement lié à C_n implique que le certificat soit de taille n et l'algorithme termine, on peut factoriser C_n :

$$C_n = q^{2n+2}(1 - q)^n D_n^{\text{diag}}$$

où D_n vérifie

$$D_n^{\text{diag}} = 2 \frac{1 - q^n}{1 - q} D_{n-1}^{\text{diag}} - \left(\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} \right)^2 D_{n-2}^{\text{diag}} \quad (4)$$

On a alors la conjecture suivante proposé en début de stage :

$$\mathbb{P}[|\text{coté du support}| = n + 1] = q^2(q^2(1 - q))^n P_n(q) \quad (5)$$

où $P_n(q)$ décrit la distribution du nombre d'inversions dans les permutations sur n éléments dont une sous-suite décroissante est distinguée.

Cette récurrence 4 est un q -analogue de la récurrence vérifiée par le nombre de permutations partielles de $\{1 \dots n\}$ démontrée par Borwein, Rankin et Renner [2]. Si on pose r_n le nombre de permutation partielle de $\{1 \dots n\}$, alors r_n vérifie :

- $r_0 = 1, r_1 = 2$
- $r_n = 2nr_{n-1} - (n-1)^2 r_{n-2}$ pour $n \geq 2$

Afin de pouvoir conserver la statistique du nombre d'inversion et de rejoindre la conjecture 5, on utilise une bijection entre les permutation partielle et les permutations à sous suite décroissante distinguée. On peut en effet construire un permutation distinguée en complétant une permutation partielle de manière décroissante. Cette construction est unique et bijective. On définit alors le nombre d'inversions d'une permutation partielle comme le nombre d'inversions de la permutation à sous suite décroissante distinguée associée.

Exemple : $f = ?26?1? \leftrightarrow f = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$. On notera dans la suite $f = \underline{5}26\underline{4}1\underline{3}$. f a donc 10 inversions.

On va donc s'inspirer de la démonstration de ce résultat pour créer le q -analogue de r_n associé au nombre d'inversions. Pour cela on va considérer les ensembles R_n et T_n qui sont respectivement l'ensemble des permutations partielles de $\{1 \dots n\}$ et l'ensemble des permutations partielles non définies en 1 de $\{1 \dots n\}$. On note r_n et t_n les q -analogues de leur cardinal pour le nombre d'inversions : $r_n = \sum_{\sigma \in R_n} q^{I(\sigma)}$ et $t_n = \sum_{\sigma \in T_n} q^{I(\sigma)}$ Par exemple, $r_2 = 3 + 4q$ et $t_2 = 1 + 2q$.

Lemme 1.

$$r_{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} r_n + q^n r_n + \frac{1 - q^n}{1 - q} t_n \quad (6)$$

Démonstration. Soit π_1, π_2 et π_3 les fonctions définies sur f , le mot de la permutation partielle, comme suit :

π_1 Soit $k \in \{1 \dots n+1\}$, pour obtenir $\pi_1(f, k)$, on augmente de 1 les éléments supérieurs ou égales à k et on ajoute k non distingué au début de la permutation. Formellement :

$$\begin{aligned} \pi_1 : R_n \times \{1 \dots n+1\} &\longrightarrow \{f \in R_{n+1} : 1 \in \mathcal{D}_f\} \\ f, k &\longmapsto \pi_1(f, k) \end{aligned}$$

où pour tout $i \in \mathcal{D}_f$, si $f(i) < k$, $\pi_1(f, k)(i+1) = f(i)$ sinon $\pi_1(f, k)(i+1) = f(i)+1$ et $\pi_1(f, k)(1) = k$

Exemple : $f = \underline{526413}$ donne $\pi_1(f, 2) = \underline{2637514}$

π_2 Pour obtenir $\pi_2(f)$, on rajoute $n+1$ distingué au début de la permutation. Formellement :

$$\begin{aligned} \pi_2 : R_n &\longrightarrow \{f \in R_{n+1} : 1 \notin \mathcal{D}_f, n+1 \notin f(\mathcal{D}_f)\} \\ f &\longmapsto \pi_2(f) \end{aligned}$$

où pour tout $i \in \mathcal{D}_f$, $\pi_2(f)(i+1) = f(i)$.

Exemple : $f = \underline{526413}$ donne $\pi_2(f) = \underline{6526413}$

π_3 Soit $k \in \{2 \dots n+1\}$, pour obtenir $\pi_3(f, k)$, on insert $n+1$ non distingué en position k de la permutation.

$$\begin{aligned} \pi_3 : T_n \times \{2 \dots n+1\} &\longrightarrow \{f \in R_{n+1} : 1 \notin \mathcal{D}_f, n+1 \in f(\mathcal{D}_f)\} \\ f, k &\longmapsto \pi_3(f, k) \end{aligned}$$

où pour tout $i \in \mathcal{D}_f$, si $i < k$, $\pi_3(f, k)(i) = f(i)$ sinon $\pi_3(f, k)(i+1) = f(i)$ et $\pi_3(f, k)(k) = n+1$

Exemple : $f = \underline{526413}$ donne $\pi_3(f, 4) = \underline{5267413}$

Les espaces d'arrivée des applications π_1, π_2 et π_3 forment une partition de R_{n+1} . Or, les applications π_1, π_2 et π_3 sont bijectives. On retrouve donc la relation $|R_{n+1}| = (n+1)|R_n| + |R_n| + n|T_n|$

On peut également suivre le nombre d'inversions qui sont créées par ces applications en ce qui concerne les permutations à sous suite décroissante distinguée.

π_1 Le nombre d'inversion ne concernant pas le premier élément ne change pas et le premier élément rajoute $k-1$ inversions.

π_2 On ajoute n inversions.

π_3 On rajoute donc $n+1-k$ inversions.

Donc

$$r_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} r_n + q^n r_n + \sum_{k=2}^{n+1} q^{n+1-k} t_n$$

□

Lemme 2.

$$t_{n+1} = q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q} t_n \quad (7)$$

Démonstration. Les espaces d'arrivée des applications π_2 et π_3 forment une partition de T_n On utilise de la même manière que pour le lemme précédent les fonctions π_2 et π_3

On a donc

$$t_{n+1} = q^n r_n + \sum_{k=2}^{n+1} q^{n+1-k} t_n$$

□

En utilisant les équations (6) au rang n et $n-1$ et (7) au rang $n-1$ on obtient :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} r_n + q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q} t_n \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} r_n + q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q} \left(q^{n-1} r_{n-1} + \frac{1-q^{n-1}}{1-q} t_{n-1} \right) \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} r_n + q^n r_n + \frac{1-q^n}{1-q} \left(q^{n-1} r_{n-1} + \left(r_n - \frac{1-q^n}{1-q} r_{n-1} - q^{n-1} r_{n-1} \right) \right) \\ &= 2 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} r_n - \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)^2 r_{n-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$r_n = 2 \frac{1 - q^n}{1 - q} r_{n-1} - \left(\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} \right)^2 r_{n-2} \quad (8)$$

Donc D_n^{diag} et r_n vérifient la même relation de récurrence et les mêmes conditions initiales donc D_n^{diag} est un q -analogue du nombre de permutations partielles pour la statistique du nombre d'inversion.

On peut construire un bijection de l'ensemble des certificats dans les permutations partielles en utilisant les fonctions π_1 , π_2 et π_3 .

Algorithm 3 Construction d'une permutation à partir d'un certificat de taille n

Input: Q certificat de taille n

```

1:  $i, j \leftarrow 0$ 
2:  $\sigma \leftarrow$  permutation vide
3: while  $i + j < n$  do
4:   if  $\exists 0 \leq k \leq i + j - 1, (k - j, j + 1) \in Q$  then                                ▷ Parcours de la frontière Nord
5:      $\sigma \leftarrow \pi_3(\sigma, i + j + 1 - k)$ 
6:      $j \leftarrow j + 1$ 
7:     continue
8:   end if
9:   if  $(i, j + 1) \in Q$  then                                                        ▷ Extrémité de la frontière Nord
10:     $\sigma \leftarrow \pi_2(\sigma)$ 
11:     $j \leftarrow j + 1$ 
12:    continue
13:  end if
14:  if  $\exists 0 \leq k \leq i + j - 1, (i + 1, k - i) \in Q$  then                            ▷ Parcours de la frontière Est
15:     $\sigma \leftarrow \pi_1(\sigma, k + 1)$ 
16:     $i \leftarrow i + 1$ 
17:    continue
18:  end if
19: end while
20: return  $\sigma$ 

```

Maintenant qu'on dispose d'une correspondance entre les certificats et permutations partielles. On peut se demander si cette correspondance est valide pour les précédents cas de symétries. On peut en fait construire un certificat de taille $2n$ du cas de la symétrie $x = -y$ à partir d'un certificat de taille n des cas avec plus de symétrie. Il suffit de rajouter les symétriques des éléments du certificat par rapport à l'axe $x = y$.

Les certificats des autres symétries sont donc en bijection avec des sous ensembles des permutations partielles.

On peut également exprimer D_n^{diag} comme la somme sur les permutations σ de la somme sur les sous suites décroissantes de σ de $q^{I(\sigma)}$. Or inverser les sommes est un procédé classique pour faire apparaître de nouveau objet combinatoire. On a donc D_n^{diag} comme la somme sur les suites décroissantes de la somme sur les permutations contenant la suite décroissante de $q^{I(\sigma)}$. Les travaux de Björner et Wachs [1] donne un théorème qui s'applique presque dans le cadre de cette sommation. Néanmoins, pour pouvoir l'appliquer, il faut s'intéresser à l'indice du major d'une permutation qui est également une statistique classique sur les permutations.

3 Addition sur les configurations de la grille

3.1 Contexte

Sur un graphe fini, on peut définir une relation d'équivalence entre configurations stables. Deux configurations sont équivalentes si on peut passer d'une configuration à l'autre par une série d'éboulement et d'anti-

éboulement. Chaque classe d'équivalence possède une seule *configuration récurrente*, caractérisée comme la configuration qui est un point fixe de la suite d'opération : éboulement du puits et stabilisation. En fixant le puits, l'ensemble des configurations récurrentes forme alors un groupe additif pour la loi de groupe suivante : la somme de deux configurations est la stabilisée de la configuration obtenue en sommant sommet par sommet ces deux configurations. Les groupes obtenus en déplaçant le puits sont isomorphes. Donc le placement du puits n'influe pas sur la structure du groupe engendré.

En munissant le graphe d'un ordre sur les arêtes, on peut associer de manière unique un arbre couvrant à une configuration récurrente en utilisant le critère de Dhar [6].

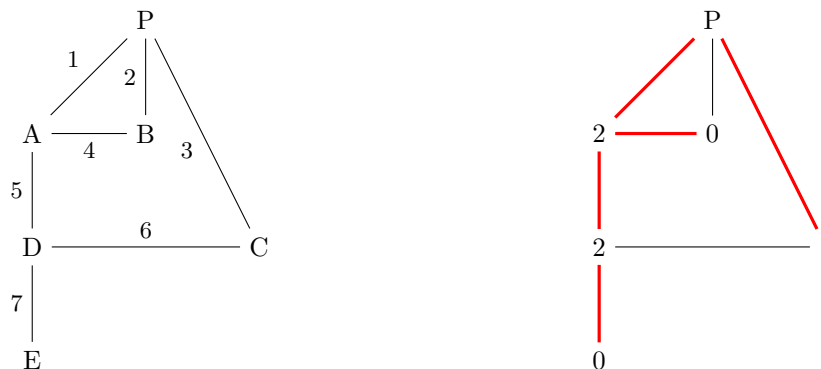


FIGURE 5 – À gauche, étiquetage des sommets et arêtes d'un graphe. À droite, distribution de grains récurrent et arbre couvrant associé

On aimerait étendre ce résultat au graphe infini \mathbb{Z}^2 et observer une structure de groupe.

Les travaux de Schmidt et Verbistky suggèrent qu'il y a peut-être une structure de groupe définissable sur la grille infinie. Comme ce groupe hypothétique aurait un nombre infini d'éléments, on essaie plus modestement de l'étudier à l'aide de sous-groupes formés d'éléments admettant une représentation, c'est-à-dire un codage, finie. Tous ces sous-groupes doivent au moins contenir l'identité. Si on distingue comme puits un sommet de la grille (par convention l'origine), un calcul censé converger vers l'identité est lié à l'éboulement d'une pile de grains placée sur l'origine. Des études ont montré que s'il y a bien une convergence pour un nombre de grains n vers un objet limite (Pegden et Smart), il y a une sorte de singularité autour de l'origine qui laisse apparemment peu d'espoir d'observer une convergence locale autour de l'origine donnant une éventuelle limite *simple* qui serait l'identité pour ce choix de puits. On essaie de se placer dans un cadre où au moins l'identité serait simple. Dans le cas fini, le groupe ne dépend pas du choix du puits, mais l'identité peut changer en fonction du puits. Dans le cas infini, l'intuition à l'origine de l'étude est que déplacer le puits vers l'infini dans une certaine direction est peut-être une alternative intéressante puisque la discussion spéculative qui suit suggère que pour ce type de choix, l'identité serait bien plus régulière. En effet, dans le cas des puits à l'infini à l'horizontale, direction $(1, 0)$, et en diagonale, direction $(1, 1)$, des candidats pour l'identité sont respectivement les configurations $2^{\mathbb{Z}^2}$ et $3^{\mathbb{Z}^2}$.

Néanmoins, dans le cadre infini, on se retrouve très facilement avec des configurations qui nécessitent un nombre infini d'éboulement. Par exemple, la configuration ne comportant que des 4 n'est pas évidente à ébouler. En suivant l'intuition du puits à l'infini dans une direction, on peut essayer d'ébouler en poussant les grains dans cette direction. Pour un puits dans la direction des x croissants, donc vers la droite, on peut ébouler les grains par droite verticale, ainsi on peut simplifier la grille par le graphe infini linéaire de la figure 6. Pour un puits dans la direction $x = y$, on peut ébouler les grains par diagonales parallèles à $x = -y$, ainsi on peut simplifier la grille par un autre graphe infini linéaire de la figure 7.

On peut voir sa stabilisation comme le limite simple d'une stabilisation locale en n'ébouillant que les sommets à distance au plus n de l'origine.

Cela rappelle la stabilisation de la pile de sable. La pile de sable est la configuration $0^{\mathbb{Z}^2}$ à laquelle on ajoute n grains à l'origine. Sa stabilisation nécessite un nombre fini d'éboulement et donc termine. Elle

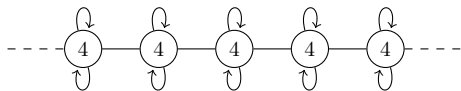


FIGURE 6 – Graphe simplifié de la grille pour un puits à l’infini à droite



FIGURE 7 – Graphe simplifié de la grille pour un puits à l’infini en diagonale

aboutit à une configuration dont la structure globale possède un objet limite une fois normalisé quand n temps vers l’infini. Cette structure fait apparaître des zones pavées par des motifs. Ainsi, si on se place dans une telle zone assez loin de l’origine, les grains auront tendance à partir dans une même direction.

Cette observation motive l’étude de configuration périodique et de leur éboulement en forçant les grains à aller globalement dans une direction donnée. Le puits est alors fixé par cette direction.

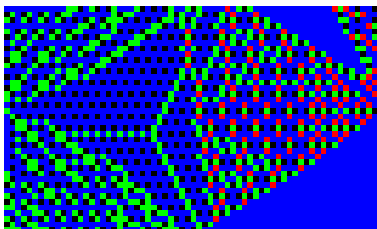


FIGURE 8 – Apparition de régularité loin de l’origine avec les zones de motifs périodiques

Ainsi, dans la suite de ce rapport, on abordera l’intérêt de choisir un puits à l’infini avec des constructions de l’identité. Puis, on va chercher un groupe de configurations périodiques récurrentes paramétré par une direction de la grille \mathbb{Z}^2 . On va d’abord définir une construction de ces configurations à l’aide d’arbres couvrants périodiques de la grille afin d’obtenir des candidats au sous groupe. Ensuite on définira un modèle d’éboulement pour définir une loi d’addition sur ces éléments.

3.2 Identité

Pour calculer algorithmiquement l’identité, il suffit de partir de la configuration nulle et d’alterner éboulement du puits et stabilisation jusqu’à obtenir un point fixe. En choisissant un puits à l’infini, on se place également dans l’hypothèse que l’identité est invariante par une translation orthogonale à la direction du puits qui sera spécifiée par la suite. On suppose également que les éboulements se font de manière parallèle. Alors en se plaçant à un instant de l’algorithme de construction de l’identité, on peut espérer avoir un front d’éboulement, c’est-à-dire une courbe 8-connectée déconnectant la grille, cette courbe étant périodique. Dans cette optique, on choisit donc de représenter le puits à l’infini comme une courbe discrète périodique pouvant paver la grille.

Quitte à supposer que la pente de la courbe est entre 0 et 1, la courbe ne contient que les motifs $\square\square$ et \square^{\square} . La direction du puits est alors la perpendiculaire à la pente de la courbe. Sa période peut se définir par un mot binaire indiquant la séquence de motifs construisant la période. C’est objet est un objet combinatoire classique correspondant aux colliers de perles bicolores.

De plus, l’identité est une configuration récurrente. Donc si le puits est éboulé, tous les sommets doivent s’ébouler. Cependant le puits étant à l’infini, on fait l’hypothèse qu’un sommet arbitraire de la grille s’éboule à la suite de l’éboulement du puits.

Reprenons le cas de la direction de puits $(1, 0)$. Par hypothèse d’invariance, on peut se ramener au graphe en 6. Supposons qu’un sommet de ce graphe ce soit éboulé. Alors par connexité du graphe, tous les sommets à sa droite se sont éboulés. Alors en utilisant le critère de Dhar localement, le grain qu’il donne à son voisin de gauche doit le rendre instable, donc il possédait 3 grains. Ainsi, la configuration $3^{\mathbb{Z}^2}$ est un bon candidat

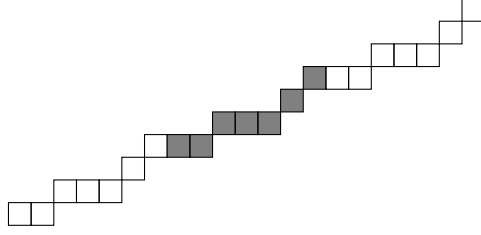


FIGURE 9 – Courbe du puits pour le mot 01001110

pour l'identité pour le puits dans la direction $(1, 0)$ et le seul dégagé par cette analyse.

Dans le cas de la direction de puits $(1, 1)$, on a peut se ramener au graphe en 7. De la même manière que le cas précédent, un sommet ne peut être déstabilisé que par son voisin de droite. Dans ce cas, comme il reçoit 2 grains, on ne sait pas si c'est le premier ou le second qui le déstabilise. On a donc une famille de candidat en bijection avec les mots bi-infinis de l'alphabet $\{2, 3\}$. Ces objets manquent de régularité, on va donc utiliser un argument de parité avec la construction algorithmique de l'identité en utilisant l'hypothèse de front d'éboulement. Dans ce cas, le front d'éboulement et une droite discrète de direction $(-1, 1)$. Donc quand un front d'éboulement s'éboule en parallèle, les sommets de la grille soit restent inchangés, soit perdent 4 grains, soit en gagnent 2. Donc la parité du nombre de grains par sommet est conservée lors de l'algorithme. Un bon candidat pour le puits dans la direction $(1, 1)$ est donc la configuration $2^{\mathbb{Z}^2}$.

À ce stade, on remarque que les hypothèses utilisées sont l'éboulement selon un front d'éboulement et une invariance par translation orthogonale à la direction du puits. Or les deux identités qu'on en déduit sont également invariantes par translation suivant la direction du puits.

Cette observation rejoint l'observation illustrée par la figure 3.1.

On va reprendre la démarche effectuée pour le cas $(1, 1)$. On utilise l'invariance par translation selon l'orthogonale de la direction du puits pour simuler la grille par une bande de hauteur finie. On coupe ensuite cette bande par un front arbitraire d'éboulement. Quand le puits s'éboule, tous les sommets jusqu'au front s'éboule, donc on assimile le front comme étant un puits. On alterne ensuite éboulement du puits et stabilisation.

On a effectué cette opération pour les tous les fronts de hauteur 6 à 13. Pour toutes les fronts testés, le processus fait apparaître des motifs se répétant sur une largeur de plus en plus longue avec une irrégularité devant le puits et à l'autre extrémité du support de l'éboulement. De plus, une fois le motif apparu, il reste stable par éboulement du puits et stabilisation. On espère alors que les configurations périodiques de motifs ces motifs sont de bons candidats d'identité pour ces directions. Cependant, il existe plusieurs courbes réalisant les mêmes pentes et expérimentalement, on obtient différents motifs pour certaines pentes. Un résultat expérimental tend à indiquer qu'en affinant les propriétés vérifiées par la courbe, on a exactement un motif par direction du puits. En effet, pour les fronts de hauteur 7, 11 et 13, la pente de la courbe, et donc la direction du puits, détermine de manière unique l'identité. Donc pour la direction (p, q) où p et q sont premier entre eux et $p \geq q$, on ne considère que les courbes de mots binaires associés u vérifiant $|u| = p$ et $|u|_1 = q$.

Le calcul de l'identité pour les pentes de type $1/n$ et $1 - 1/n$ font également apparaître des motifs proches du calcul de l'identité avec le puits à l'origine. On retrouve aussi des motifs proches dans l'article de Caracciolo, Paoletti et Sportiello [3] ainsi que dans la thèse de Paoletti [7].

3.3 Construction des configurations périodiques

L'objectif de cette partie est de donner une méthode satisfaisante pour construire des configurations récurrentes périodiques.

Sur un graphe fini, les configurations récurrentes sont celles vérifiant le critère de Dhar : si on éboule le puits, alors la stabilisation va ébouler chaque sommet du graphe une unique fois. On peut alors construire

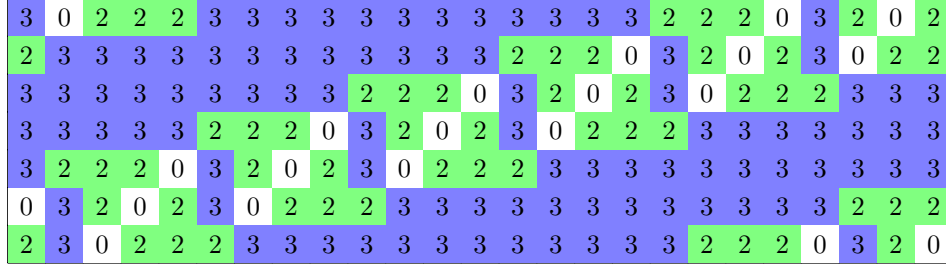


FIGURE 10 – Identité pour une courbe de pente 3/7 de période de longueur 7

de manière bijective un arbre couvrant de racine le puits en désignant comme père d'un sommet le sommet qui lui a donné le grain le rendant instable.

Algorithm 4 Construction d'un arbre couvrant à partir d'une configuration récurrente n

Input: $G = (V, E)$ un graphe, p un sommet du graphe, \prec_E un ordre sur les arêtes de G , $c : V \mapsto \mathbb{N}$ le nombre de grains par sommet

Output: arbre couvrant de G

- 1: $pere[p] \leftarrow p$
- 2: $S \leftarrow \{(p, v) \in E\}$
- 3: **while** S est non vide **do**
- 4: $(u, v) \leftarrow$ plus petite arête de S pour l'ordre \prec_E
 ▷ quitte à permuter u et v , on suppose u éboulé
- 5: $c_v \leftarrow c_v + 1$
- 6: **if** v est instable **then**
- 7: $pere[v] \leftarrow u$
- 8: $c_v \leftarrow c_v - deg(v)$
- 9: $S \leftarrow S \cup \{(v, w) \in E\}$
- 10: **end if**
- 11: **end while**
- 12: **return** $pere$

Algorithm 5 Construction d'une configuration récurrente à partir d'un arbre couvrant

Input: $G = (V, E)$ un graphe, p un sommet du graphe, \prec_E un ordre sur les arêtes de G , $pere$ un arbre couvrant de racine p

Output: $c : V \mapsto \mathbb{N}$ le nombre de grains par sommet

- 1: $c_u \leftarrow deg(u)$ pour tout $u \in V$
 - 2: $S \leftarrow \{(p, v) \in E\}$
 - 3: **while** S est non vide **do**
 - 4: $(u, v) \leftarrow$ plus petite arête de S pour l'ordre \prec_E
 ▷ quitte à permuter u et v , on suppose u éboulé
 - 5: **if** v non marqué **then**
 - 6: $c_v \leftarrow c_v - 1$
 - 7: **if** $pere[v] = u$ **then**
 - 8: marquer v
 - 9: **end if**
 - 10: **end if**
 - 11: **end while**
 - 12: **return** c
-

On va donc adapter le second algorithme afin d'obtenir des résultats convainquant pour la grille.

Comme on s'intéresse à des configurations périodique de la grille. On peut regrouper les configurations par taille du motif rectangulaire de taille minimal qui quadrille la configuration. En étudiant les éboulements sur ces rectangles rendus toriques, on espère obtenir une description viable de ce qui se passe sur la grille.

Pour reproduire un motif, on va donc réduire la grille à un rectangle torique de taille $m \times n$. On considère ensuite l'ensemble des recouvrements du tore par mn arêtes vérifiant que chaque composante connexe ne possède qu'un cycle introduit par Kenyon [4]. On appellera cycle contractile un cycle du tore qui, reporté sur la grille, reste un cycle. Les autres cycles du tore correspondent alors à des chemins infinis sur la grille. On appellera *forêts couvrantes périodiques* les recouvrements ne possédant pas de cycle contractile. Une *forêt couvrante périodique orientée* est une forêt couvrante périodique dans laquelle on a orienté les arêtes de telle sorte que les cycles sont orientés de manière cohérente, et que les arêtes hors des cycles sont orientés vers le cycle de leur composante.

On a alors la propriété suivante : chaque bord du rectangle est traversé autant de fois par chaque cycle. Cela définit pour chaque forêt couvrante périodique une direction. Or, dans le critère de Dhar, l'orientation d'une arête indique d'où vient le grain, donc on associe naturellement à une forêt un puits dans une direction.

Si une forêt couvrante périodique ne possède qu'un cycle, on parlera alors d'*arbre couvrant périodique*. On se limitera dans la suite aux arbres couvrants périodiques orientés pour des raisons de difficulté technique.

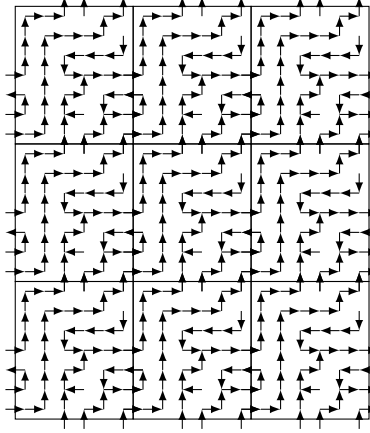


FIGURE 11 – Exemple de recouvrement avec un cycle contractile et deux cycles non contractiles

On a envie d’appliquer le critère de Dhar [6] pour construire une configuration récurrente. Cependant, dans le cadre fini, on dispose d’un puits dans le graphe qui n’existe pas comme sommet de la grille. Il faut donc adapter l’algorithme.

Soit un arbre couvrant périodique orienté du tore $m \times n$. On pointe un sommet du cycle de l’arbre dont le successeur est de l’autre côté du tore. On va considérer ce sommet comme le premier du cycle rendu instable lors de l’éboulement du puits qui se trouve à l’infini. En retirant l’arête correspondante, on obtient un arbre couvrant le tore. Si on se replace dans la grille, on remarque qu’un arbre chevauche dans le cas général plusieurs rectangles. Ainsi, à chaque sommet de l’arbre, on associe les coordonnées relatives du rectangle auquel il appartient. On ordonne alors les arêtes suivant un ordre produit sur la distance des rectangles au puits par un ordre sur les arêtes du tore respectant les propriétés suivantes :

- les arêtes sortantes de sommets d’un rectangle proche du puits sont prioritaires devant les arêtes sortantes de sommets d’un rectangle plus éloigné.
- les arêtes de rectangles à même distance du puits suivent l’ordre des arêtes fixé sur le tore.

Cet ordre force l’éboulement de l’arbre couvrant périodique par période.

On a donc une application de l’ensemble des arbres couvrants périodiques vers des configurations récurrentes couplées à une direction. Compte tenu des hypothèses faites, on ne s’attend pas à ce que l’application soit une surjection. Cependant pour les cas testés, rectangle de taille 2×2 et 2×3 , l’application est injective.

Un début de preuve de correction de cet algorithme est en œuvre mais ne rentrait pas dans le temps imparti pour l’intégrer au rapport. L’idée de la preuve est déterminer les bonnes conditions de bord à placer sur le rectangle, c’est-à-dire l’ensemble des sommets voisins du rectangle qui ont pu s’ébouler avant que le premier sommet du rectangle s’éboule. Des conditions initiales induisent de nouvelles conditions pour les rectangles plus éloignés du puits et on s’attend que l’automate des conditions soit stationnaire. Ensuite l’ordre fixé dans le cadre de l’algorithme simule bien l’ordre sur la grille ce qui complète la correction.

3.4 Modèle d’éboulement

Maintenant qu’on dispose d’un ensemble de configurations récurrentes périodiques, on souhaite stabiliser la somme de deux configurations. Cependant, stabiliser de telle configuration nécessitent un nombre infini d’éboulement. Il faut donc trouver une bonne stratégie en utilisant les propriétés périodiques des configurations ainsi que l’invariance par translations orthogonales à du puits.

Dans le cas où on somme des configurations périodiques de motif de taille 1×1 , il n’y a pas de difficulté. En effet, il n’existe que deux configurations récurrentes de ce type, $2^{\mathbb{Z}^2}$ et $3^{\mathbb{Z}^2}$. Comme il s’agit d’identités, on peut les assimiler à une infinité du puits. Or les récurrentes sont les points fixes de l’opération ébouler le puits puis stabiliser. Donc l’identité est un élément neutre de l’addition sur les configurations récurrentes.

Donc pour la direction $(1, 1)$, on a $2^{\mathbb{Z}^2} + 3^{\mathbb{Z}^2} = 3^{\mathbb{Z}^2}$.

Pour des tailles plus grandes, on utilise les observations de la partie précédente. On se ramène à une bande de largeur la hauteur de la période de la courbe décrivant le puits. Comme précédemment, on se ramène où le puits est dans une direction de pente comprise entre 0 et 1, le puits étant à droite. Maintenant, à la place d'ébouler le puits, on veut envoyer le surplus de grain vers le puits. On part donc de l'hypothèse suivante : si on coupe verticalement la bande en deux parties, alors il y a plus de grain qui traverse la coupe de la gauche vers la droite que de la droite vers la gauche. Alors si un sommet de droite adjacent à la coupe s'éboule, le grain revient qu'il envoie à gauche revient par éboulement d'un sommet de gauche adjacent à la coupe.

Le modèle que l'on va utiliser est donc un cylindre, une portion de largeur finie de la bande. On va alors simuler ce retour dans notre modèle en utilisant des demi-arêtes avec des sommets de degré 1 à leur extrémité au niveau de la coupe gauche et à l'inverse placer un puits à la coupe droite pour indiquer que les grains ne reviennent pas.

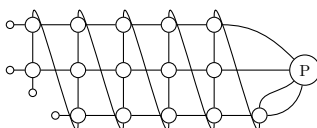


FIGURE 12 – Modèle d'éboulement cylindrique pour la courbe 001

On utilise ce modèle pour faire des additions sur les configurations récurrentes périodiques obtenues à partir d'arbres couvrants périodiques du tore 2×2 pour le puits dans la direction $(1, 0)$. On dispose de 11 motifs différents et 33 en comptant les translations.



FIGURE 13 – Motifs des configurations récurrentes périodiques du carré 2×2

On construit alors un modèle d'éboulement de taille $2k \times 2$ où on répète k fois la somme de deux motifs. Puis on stabilise. Alors on rencontre les propriétés suivantes :

- le résultat est de la forme $uv^l w$ où u , v et w ne dépendent pas de k dès que k est supérieur à 6. On obtient donc une structure presque périodique avec des effets de bords. Pour deux configurations on a donc un seul candidat pour la somme.
- le structure engendrée par les 33 éléments possèdent 37 éléments, soit 4 de plus qui sont de taille 4×2 .

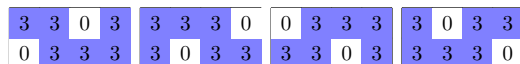


FIGURE 14 – Motifs engendrés par les 33 motifs 2×2

L'ensemble engendré est donc fini, il n'a pas d'explosion combinatoire qui indiquerait une difficulté supplémentaire voir même une impossibilité à l'établissement d'un groupe sur des configurations récurrentes périodiques.

- la loi obtenue n'est pas associative et l'identité n'est pas un élément neutre. Les configurations de motif de taille 4×2 ne sont pas stable par addition à $3^{\mathbb{Z}^2}$. De plus les seuls sous ensembles qui forment des groupes sont de cardinal 1 ou 2.

On va essayer d'affiner le modèle pour obtenir de meilleurs propriétés, l'objectif étant d'avoir l'associativité et l'élément neutre.

On s'intéresse à ce qui se passe au bord qui est le point sensible du modèle d'éboulement.

Tout d'abord, en utilisant la première propriété, on peut s'intéresser aux triplets (u, v, w) à la place de ne garder que le v . Alors la somme de deux triplets est un triplet mais les simulations montrent que l'ensemble des ces triplets est exponentielle en la taille du modèle, donc en k .

Il aimerait donc faire disparaître u et v pour obtenir un résultat périodique et non plus quasi-périodique.

Si cela était le cas, alors on pourrait coller deux modèles l'un après l'autre pour construire un modèle deux fois plus grand tout en obtenant la même répétition du même motif. Donc on souhaite que les nombres de grains qui passent sorte du modèle vers la le puits soit en accord avec les grains qui sortent par le côté opposé. On a émis l'hypothèse que si un grain part à gauche, il revient ensuite. Cependant, on peut supposer qu'il existe un nombre fini de grains qui soit en passer dans un sens mais pas dans l'autre par le bord gauche et que si un grain utilise une arête pour traverser le bord gauche, il peut revenir par une autre arête.

En étudiant dans le modèle précédent les transferts de grains aux bords, on s'aperçoit que la différence entre le nombre d'éboulement des sommets du bords droit n'est jamais le même que la même différence pour les sommets du bords gauche lorsque le résultat n'est pas périodique, lorsque que u ou w ne sont pas vides. Cette observation montre qu'on ne peut pas concaténer deux modèles pour en faire un plus grand. Ce modèle est n'est donc pas bon car son étude ne permet pas d'obtenir un résultat satisfaisant pour la somme de deux configurations récurrentes périodiques.

Cependant, un modification de l'algorithme d'éboulement sur le modèle permet d'aligner les différences du nombre d'éboulements des deux bords lors de la stabilisation dans la plupart des cas. Cela consiste à rajouter ou retirer des grains sur les sommets des extrémités du cylindre. Dans ce cas, les résultats sont périodiques.

Ces améliorations sont encourageantes car le modèle est plus cohérent et on obtient de meilleurs résultats. Néanmoins, on n'a toujours pas d'associativité ni d'élément neutre.

4 Conclusion

La bijection obtenue en section 2 entre la stabilisation d'une configuration dans $\{2, 3\}^{\mathbb{Z}^2}$ avec un axe de symétrie et les permutations partielles, résolvant la conjecture donnée en début de stage, est un résultat central et prometteur car il crée une passerelle entre les deux objets combinatoires. Ce résultat est aussi encourageant pour obtenir d'autres bijections dans le cas des symétries non traitées lors du stage, comme la symétrie verticale et l'absence de symétrie. De plus, des pistes sont ouvertes concernant la série associée à la description en terme de probabilité.

Les travaux sur les configurations périodiques ont testé la robustesse du modèle autour de la recherche d'une définition de somme de configurations périodiques récurrentes. Ces tests n'ont pas rencontré d'obstacle majeur et permettent d'espérer l'existence d'un groupe sur des configurations périodiques. Des résultats plus précis accompagnés d'une preuve sont en cours concernant les forêts couvrantes périodiques.

Références

- [1] Anders Björner and Michelle L Wachs. q -hook length formulas for forests. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 52(2) :165 – 187, 1989.
- [2] David Borwein, Stuart Rankin, and Lex Renner. Enumeration of injective partial transformations. *Discrete Mathematics*, 73(3) :291 – 296, 1989.
- [3] S. Caracciolo, G. Paoletti, and A. Sportiello. Explicit characterization of the identity configuration in an Abelian sandpile model. *Journal of Physics A Mathematical General*, 41 :5003, December 2008.
- [4] Richard Kenyon. Spanning forests and the vector bundle laplacian. *Ann. Probab.*, 39(5) :1983–2017, 09 2011.
- [5] Lionel Levine, Wesley Pegden, and Charles K. Smart. Apollonian structure in the abelian sandpile, 2012.

- [6] S.N. Majumdar and Deepak Dhar. Equivalence between the abelian sandpile model and the $q \rightarrow 0$ limit of the potts model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 185(1-4) :129 – 145, 1992.
- [7] Paoletti. *Deterministic Abelian Sandpile Models and Patterns*. PhD thesis, Università di Pisa, 2012.
- [8] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. <http://oeis.org>.

Annexe

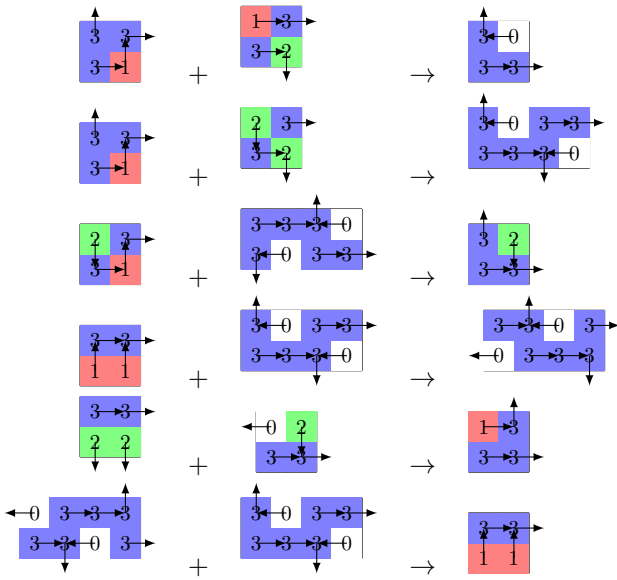


FIGURE 15 – Extrait de la loi d'addition pour les configurations périodiques 2×2 dans la direction $(1,0)$