

Études de relaxations dans le modèle du tas de sable sur la grille 2D

Henri Derycke
Encadrant : Yvan Le Borgne

ENS Lyon

LaBRI

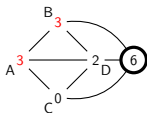
23 juin 2015



- 1 Modèle du tas de sable

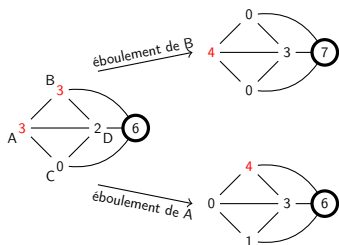
- 2 Éboulement sur la grille infinie
 - Simplification rectangulaire
 - Algorithme d'éboulement
 - Simplification par symétrie

- 3 À la recherche d'un groupe
 - Groupe fini
 - Cadre infini
 - Étude de l'identité
 - Construction de configurations récurrentes à partir du tore
 - Calcul avec les bi-périodiques



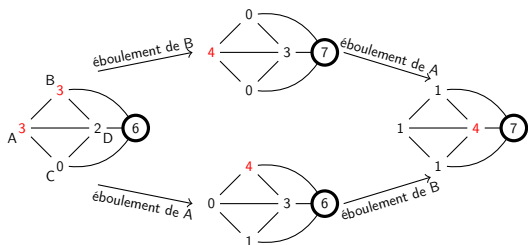
Définition

Puits, Grains, Sommet stable, Éboulement, Stabilisation, Support d'un éboulement



Définition

Puits, Grains, Sommet stable, Éboulement, Stabilisation, Support d'un éboulement

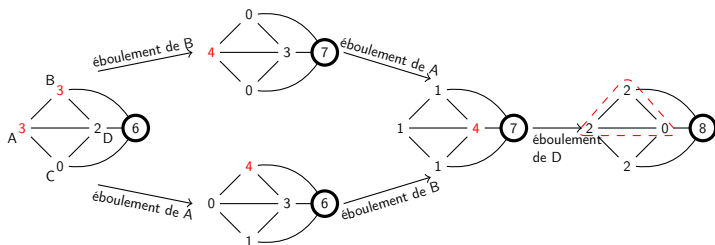


Définition

Puits, Grains, Sommet stable, Éboulement, Stabilisation, Support d'un éboulement

Proposition

L'ordre d'éboulement n'influe pas sur le résultat de la stabilisation.

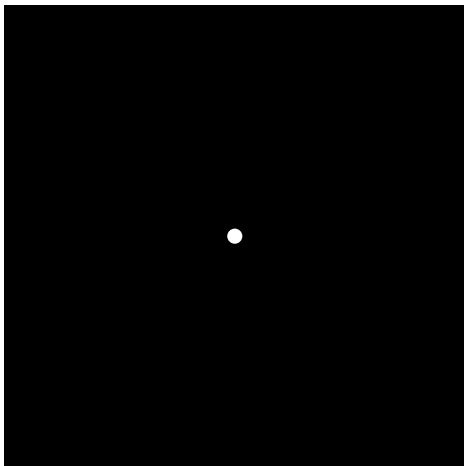


Définition

Puits, Grains, Sommet stable, Éboulement, Stabilisation, Support d'un éboulement

Proposition

L'ordre d'éboulement n'influe pas sur le résultat de la stabilisation.



- Graphe \mathbb{Z}^2 où chaque sommet a 4 voisins
- Existence qu'un objet limite après normalisation
- Autosimilarité
- Structure complexe
- Travaux de Paoletti [Pao12], Levine, Pegden, Smart [LPS12]

Figure – Pile de sable pour $n = 1000000$

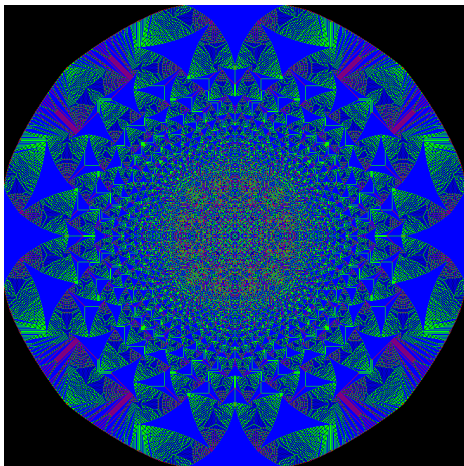


Figure – Pile de sable pour $n = 1000000$

- Graphe \mathbb{Z}^2 où chaque sommet a 4 voisins
- Existence qu'un objet limite après normalisation
- Autosimilarité
- Structure complexe
- Travaux de Paoletti [Pao12], Levine, Pegden, Smart [LPS12]

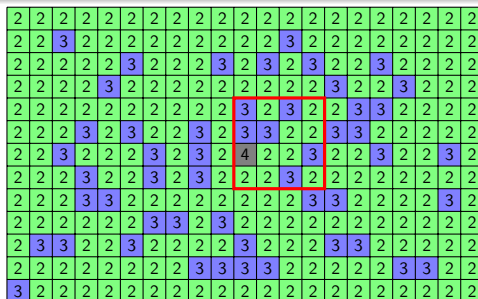
Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine



Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

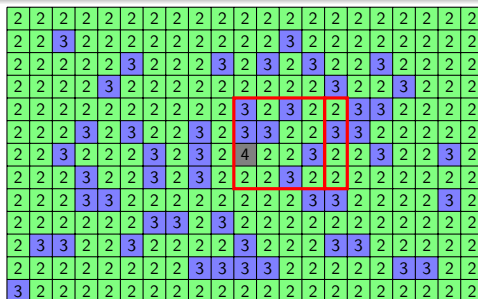
Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine



Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine



Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

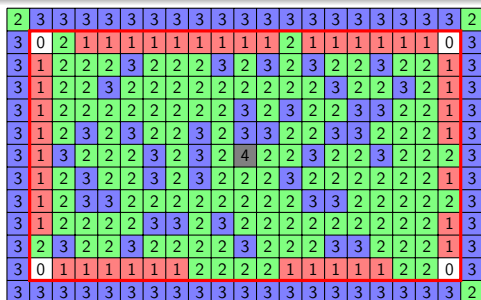
Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	3	2	3	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	3	2	3	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	3	2	4	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2
2	2	2	3	2	2	3	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	2	2	2	3	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	3	3	2	2
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine



Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine



Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

Configuration ne contenant que 2 ou 3 grains par sommet sauf 4 à l'origine

2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	
3	0	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	1	0	3		
3	2	0	1	1	2	1	1	1	2	2	3	2	3	2	2	3	0	3	1	3	
3	2	1	2	3	2	2	2	2	3	0	1	1	1	2	1	0	3	3	1	3	
3	2	1	2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	1	3	
3	2	1	3	2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	3	3	1	2	3	1	3	
3	2	2	2	2	2	3	2	3	3	3	2	2	3	2	2	2	2	3	2	3	
3	2	1	3	2	2	3	2	3	3	1	2	3	2	2	2	1	2	3	1	3	
3	2	1	3	3	2	2	2	2	3	0	1	1	2	2	1	0	2	3	2	3	
3	2	1	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	1	3
3	3	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	0	3	1	3	
3	0	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	2	0	3	
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2

Stabilisation : on éboule les sommets instables tant qu'il en existe.

Vague : on éboule les sommets instables non déjà éboulés tant qu'il en existe.

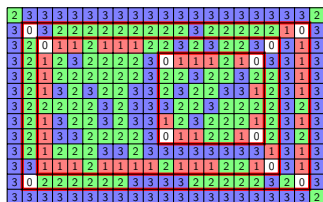


Figure – Stabilisation rectangulaire

- Construction : chaque sommet a une probabilité q d'avoir 2 grains, 3 grains sinon
- Équation sur la probabilité d'obtenir comme support un rectangle de taille donnée
- Lien avec des ensembles de permutations

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	4	3	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	4	3	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	●	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	●	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	●	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	3	●	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	●	2	●	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	●	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	●	3	●	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	●	2	●	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2
2	3	2	2	3	3	2	●	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	●	2	2	3	2	2	2
2	2	2	2	2	2	●	3	●	3	●	3	2
2	2	2	2	2	2	2	●	2	●	4	●	2
2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

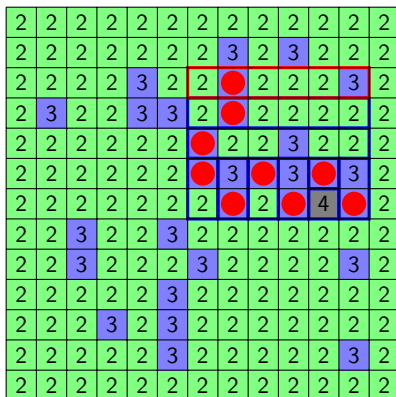


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

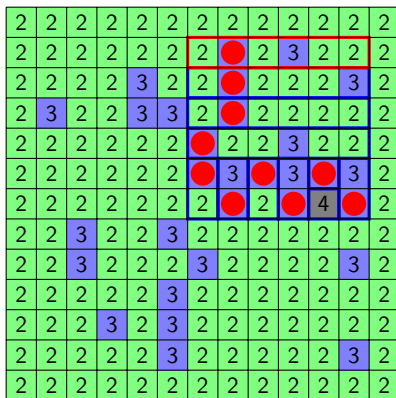


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

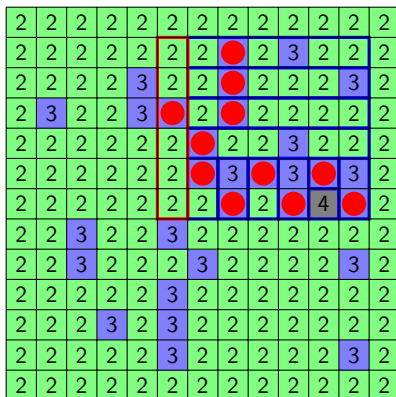


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

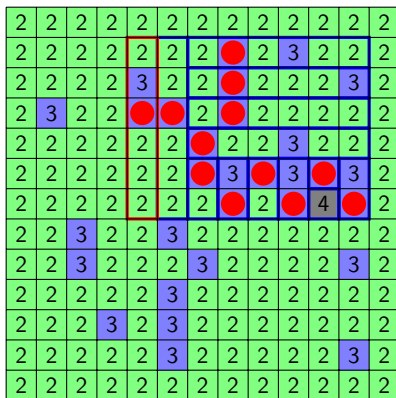


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

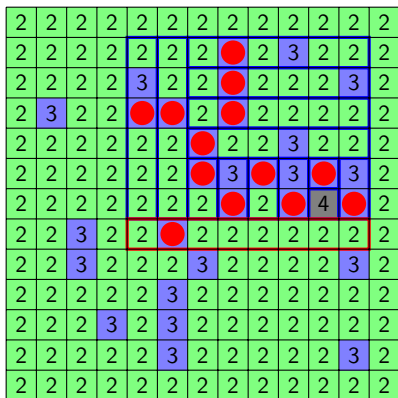


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

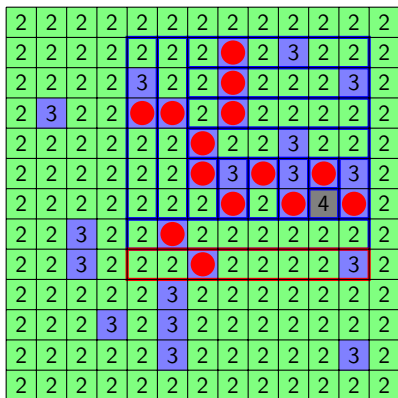


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

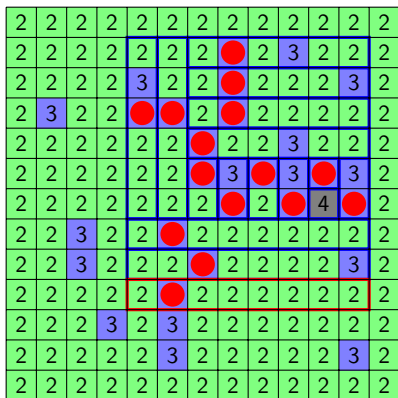


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

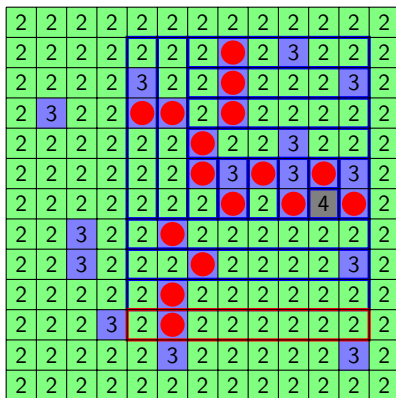


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

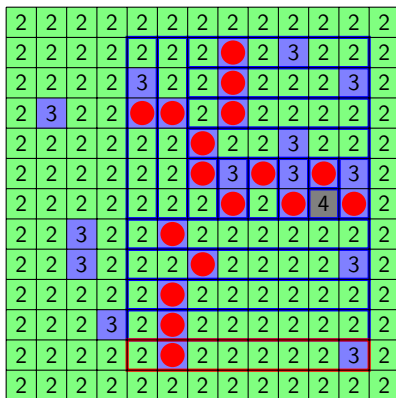


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

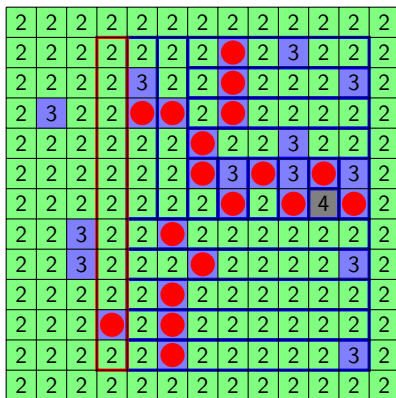


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

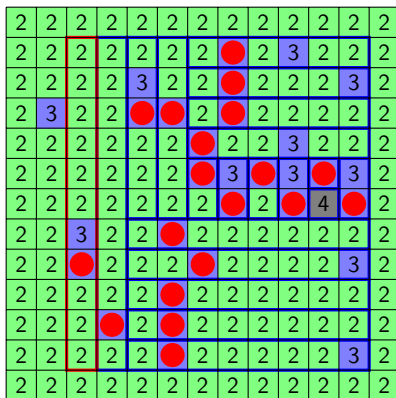


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

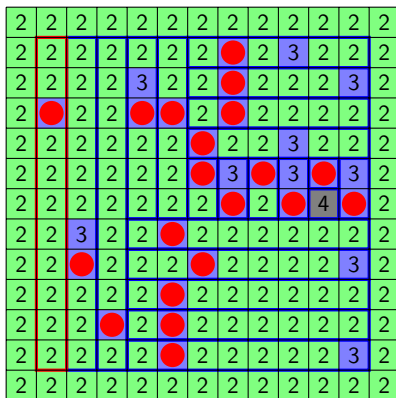


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

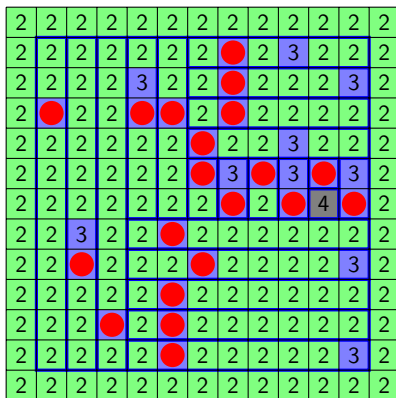


Figure – Stabilisation rectangulaire

Éboulement côté par côté

Définition

Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

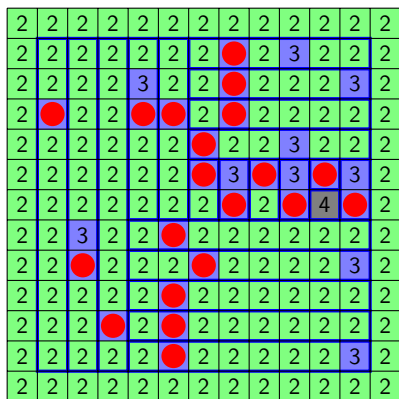


Figure – Stabilisation rectangulaire

Série génératrice codant la probabilité d'obtenir comme support un rectangle de taille $(i + 1) \times (j + 1)$

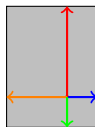
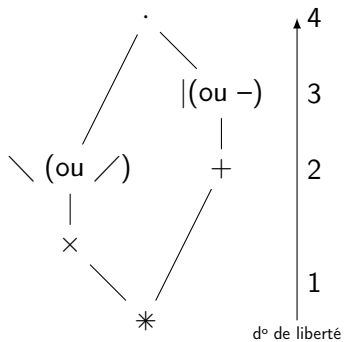
$$P(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} x^i y^j \mathbb{P}[\text{support de taille } (i + 1) \times (j + 1)]$$

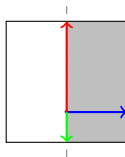
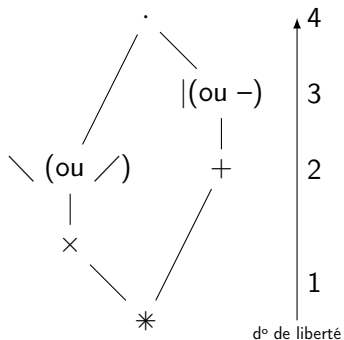
Éboulement côté par côté

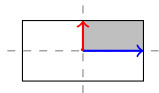
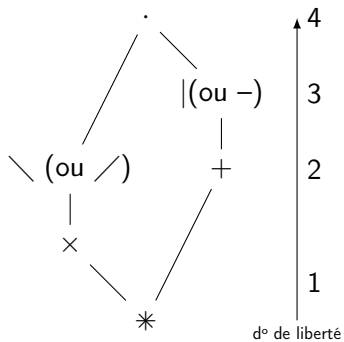
Définition

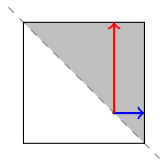
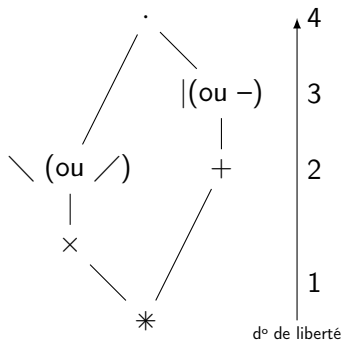
Un *certificat* est un ensemble de sommets avec 3 grains suffisant pour mener une vague de taille donnée. Pour un même rectangle, il peut y avoir plusieurs certificats.

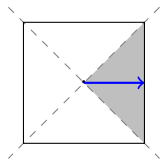
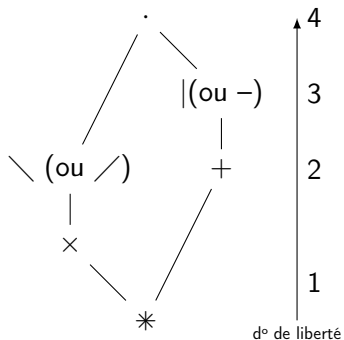
- Automate à 16 états et 4 variables entières croissantes
- Équation q-linéaire sur la probabilité.

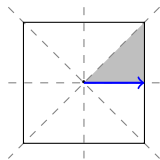
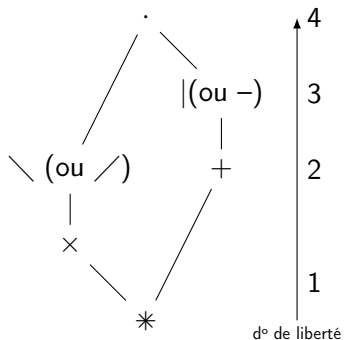


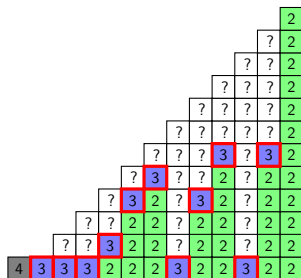
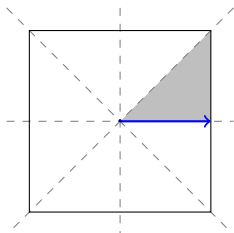








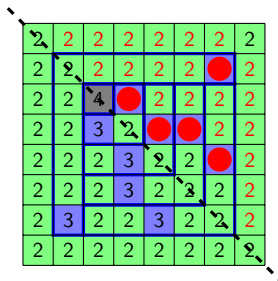
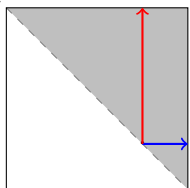




- Table d'inversions des permutations
Ici : (1 6 5 9 2 11 8 4 3 7 10) avec 21 inversions

Théorème

$$\mathbb{P}[\text{support de taille } (n+1) \times (n+1)] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\#\text{inversions de } \sigma}$$



- Permutations à sous suite décroissante distinguée
Ici : (5 3 2 4 1)

Théorème (Derycke)

$$\mathbb{P}[\text{support de taille } (n+1) \times (n+1)] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\# \text{sous suites décroissantes de } \sigma) q^{\#\text{inversions de } \sigma}$$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Définition

Une permutation partielle de $\{1, \dots, n\}$ est une injection d'un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exemple

23?84?76 est une permutation partielle définie sur $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ et non définie sur $\{3, 6\}$

Bijection entre les certificats et les permutations partielles.

Bijection entre les permutations partielles et les permutations à sous suites décroissantes distinguées.

Ex : 23?84?76 \rightarrow 23584176

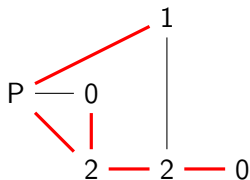
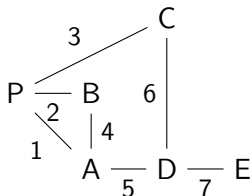
On peut suivre le poids du certificat avec le nombre d'inversions.

- 1 Modèle du tas de sable
- 2 Éboulement sur la grille infinie
 - Simplification rectangulaire
 - Algorithme d'éboulement
 - Simplification par symétrie
- 3 À la recherche d'un groupe
 - Groupe fini
 - Cadre infini
 - Étude de l'identité
 - Construction de configurations récurrentes à partir du tore
 - Calcul avec les bi-périodiques

- Éléments du groupe : états récurrents de la chaîne de Markov de transition « ajout d'un grain puis stabilisation ».
- Loi du groupe : addition puis stabilisation

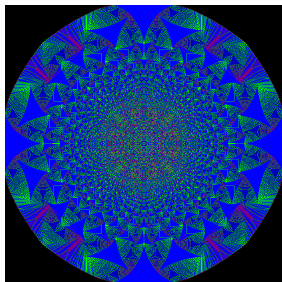
Critère de Dhar

Une configuration est récurrente si et seulement si elle est point fixe de l'opération : éboulement du puits puis stabilisation.

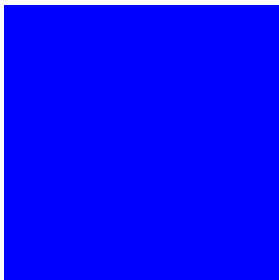


Théorème (Dhar)

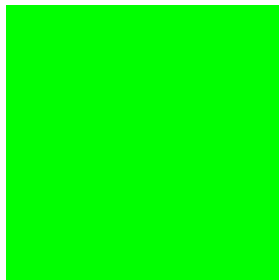
Équivalence entre récurrents et arbres couvrants enracinés dans le puits



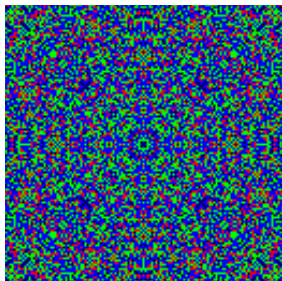
Objet complexe



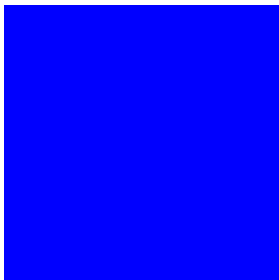
Identité dans le cas
d'un puits à l'infini à
l'Est



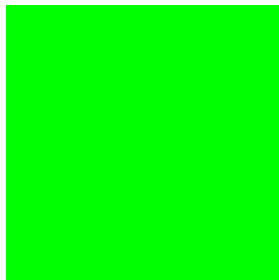
Identité dans le cas
d'un puits à l'infini au
Nord-Est



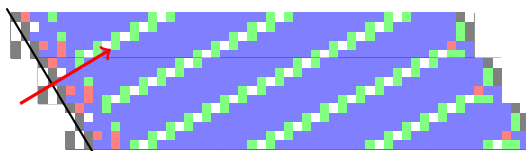
Objet complexe



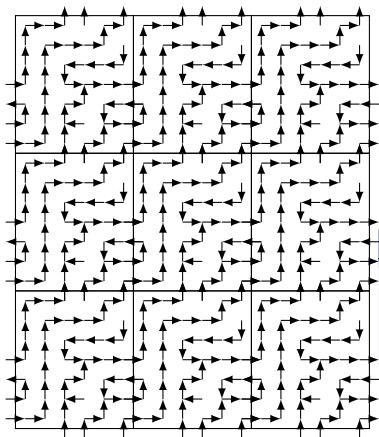
Identité dans le cas
d'un puits à l'infini à
l'Est



Identité dans le cas
d'un puits à l'infini au
Nord-Est



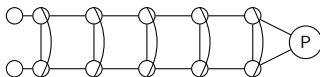
- Périodicité sur l'orthogonale à la direction
- Expérimentalement, pour des pentes de dénominateur ≤ 13 , périodicité horizontale.



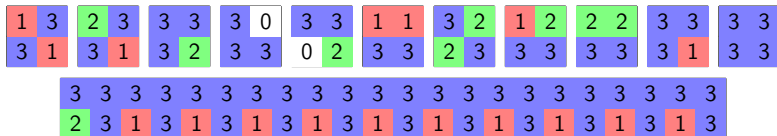
- Recouvrement bi-périodique
- Réduction au tore

Conjecture

On a un algorithme injectif de ces recouvrements dans des configurations récurrentes de \mathbb{Z}^2



Cas de la direction Est



Engendre un ensemble fini pour la loi d'addition.

3	3	0	3
0	3	3	3

Absence d'associativité et d'élément neutre

Théorème

$$\mathbb{P}[\text{support de taille } (n+1) \times (n+1)] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\# \text{sous suites décroissantes de } \sigma) q^{\#\text{inversions de } \sigma}$$

- On espère étendre ce résultat aux cas avec plus de degrés de liberté.
- Pas d'obstacle majeur rencontré
- Presque l'identité
- Presque les récurrentes
- Presque l'addition sur 2×2 .



David Borwein, Stuart Rankin, and Lex Renner.
Enumeration of injective partial transformations.
Discrete Mathematics, 73(3) :291 – 296, 1989.



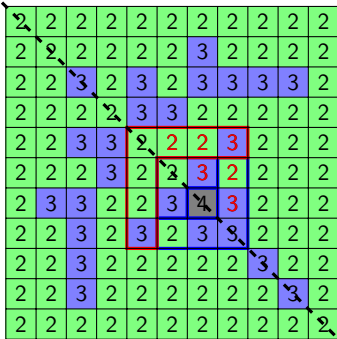
Lionel Levine, Wesley Pegden, and Charles K. Smart.
Apollonian structure in the abelian sandpile, 2012.



Paoletti.
Deterministic Abelian Sandpile Models and Patterns.
PhD thesis, Università di Pisa, 2012.

















2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

$$\bullet \begin{cases} A_{i,j} &= (1 - q^{i+j})A_{i,j-1} \\ &+ (1 - q^{i+j-1})(1 - q)B_{i-1,j-1} \\ B_{i,j} &= q(1 - q^{i+j})B_{i-1,j} \\ &+ q^{i+j+1}A_{i,j} \end{cases}$$

- Par un pivot :

$$C_n = 2q^2(1 - q^n)C_{n-1} - q^2(q(1 - q^{n-1}))^2C_{n-2}$$

- $q \rightarrow 1$: $d_n = 2nd_{n-1} - (n-1)^2d_{n-2}$

- Borwein, Rankin, Renner [BRR89] :
Permutations partielles

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	3	3	2	2	2	3	4	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ???$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ???$

$\pi_3 \rightarrow ???4$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	3	3	2	2	3	3	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ??$

$\pi_3 \rightarrow ??24$

$\pi_3 \rightarrow ??2?54$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	4	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ??$

$\pi_3 \rightarrow ??24$

$\pi_3 \rightarrow ??2?54$

$\pi_3 \rightarrow ?62?54$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	3	2	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ??$

$\pi_3 \rightarrow ??24$

$\pi_3 \rightarrow ??2?54$

$\pi_3 \rightarrow ?62?54$

$\pi_1 \rightarrow 2?73?65$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	3	3	2	2	3	2	3	2	2
2	2	3	2	3	2	3	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ?2?$

$\pi_3 \rightarrow ?2?4$

$\pi_3 \rightarrow ?2?54$

$\pi_3 \rightarrow ?62?54$

$\pi_1 \rightarrow 2?73?65$

$\pi_1 \rightarrow 23?84?76$

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	3	2	2	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	3	2
2	2	2	2	3	3	2	2	2	2
2	2	3	3	2	2	3	2	2	2
2	2	2	3	2	2	3	2	2	2
2	3	3	2	2	3	4	3	2	2
2	2	3	2	3	2	3	3	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Certificat \leftrightarrow permutation partielle

$\pi_2 \rightarrow ?$

$\pi_1 \rightarrow 2?$

$\pi_2 \rightarrow ??$

$\pi_3 \rightarrow ??4$

$\pi_3 \rightarrow ??54$

$\pi_3 \rightarrow ?62?54$

$\pi_1 \rightarrow 2?73?65$

$\pi_1 \rightarrow 23?84?76 \rightarrow 23584176$

10 inversions \leftrightarrow 10 2 rouges (hormis les côtés)

Poids du certificat : q^{10}