Combinatoire dans des relaxations du modèle du tas de sable

Henri Derycke

LaBRI

Modèle du tas de sable

G graphe connexe fini muni d'un nombre de grains par sommet. Un sommet qui a plus de grains que de voisins est dit instable et peut s'ébouler en donnant un grain à chacun de ses voisins.
En choisissant un sommet afin qu'il ne s'éboule pas, nommé puits, on peut stabiliser une configuration en éboulant les sommets instables tant qu'il en existe.

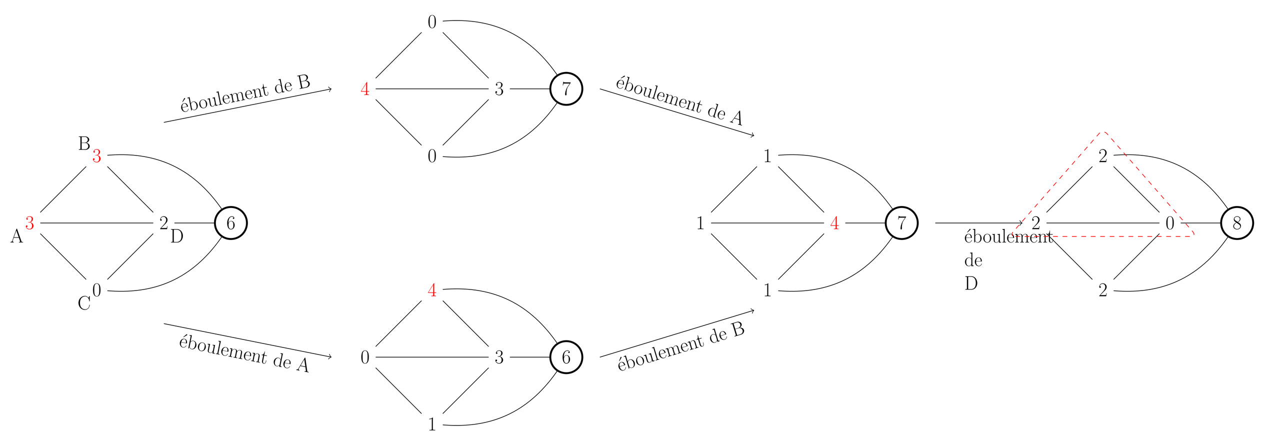


FIGURE – Commutativité des éboulements dans la stabilisation

- Modèle de diffusion isotrope discret.
- Chaine de Markov (ajout d'un grain puis stabilisation)
- Les états récurrents forment un groupe additif
- Ces éléments sont en bijection avec les arbres couvrants de G (Critère de Dhar)

Structure fractale de la pile de sable expliquée par Levine, Peres (probabilistes), Pegden, Smart (analystes), Paoletti, Sportiello, Caracciolo (physique/informatique) et organisation en zones (quasi)-périodiques.

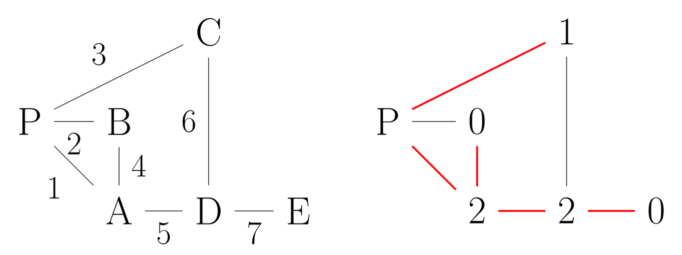


FIGURE – Arbre couvrant

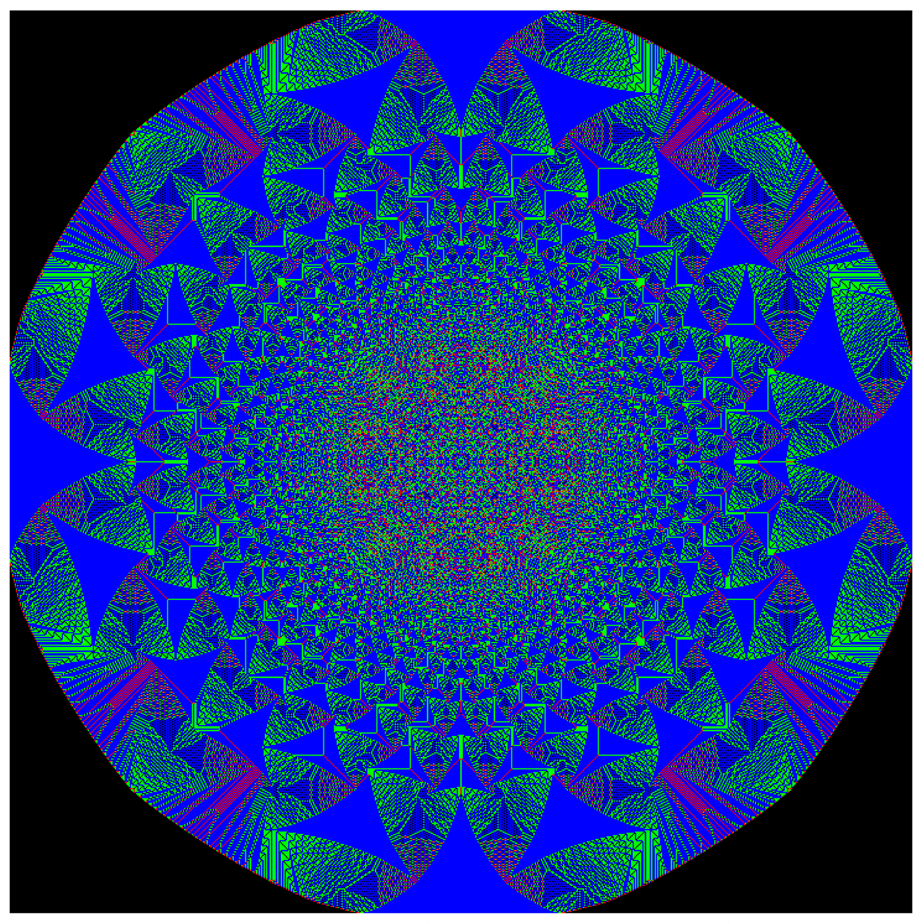


FIGURE – Pile 10^6 grains stabilisée sur $\mathbb{Z}^2$

Simplification sur $\mathbb{Z}^2$

Majoration du nombre de grains :
$valeur = \max(valeur, 2)$

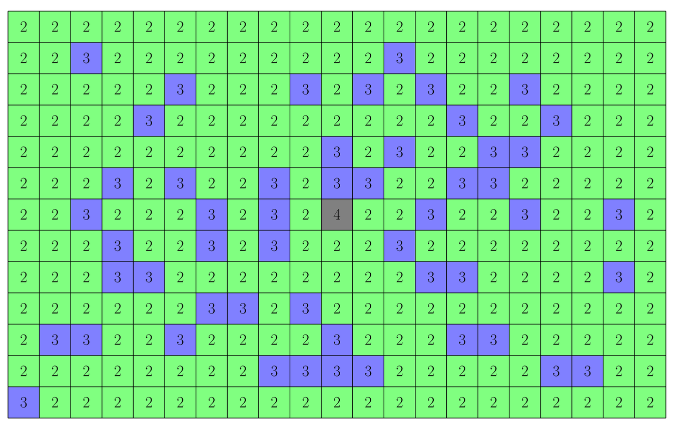
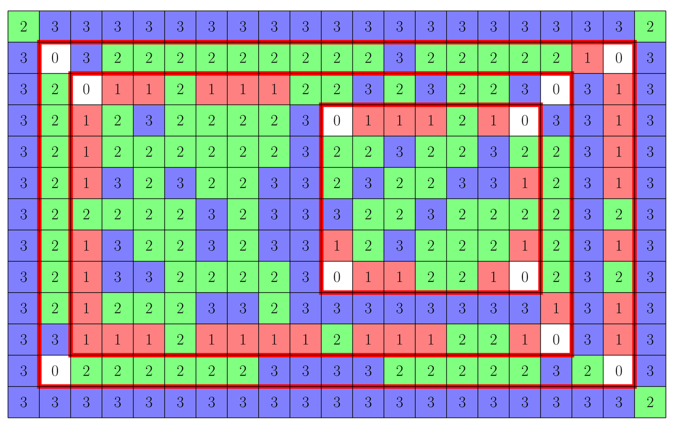


FIGURE – Stabilisation rectangulaire



Bernoulli de poids $(1-q)$ sur $\{2,3\}$ en chaque sommet
$\Rightarrow$ modèle de Frobose local percolation

Symétries

Symétries sur les tirages aléatoires et sur les éboulements

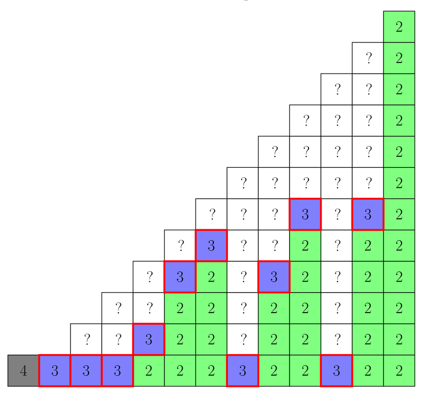


FIGURE – Toutes les symétries - Table d'inversions

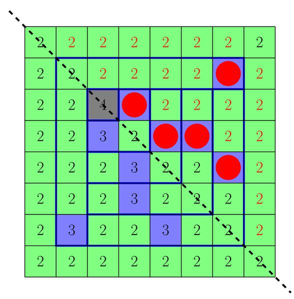


FIGURE – Symétrie diagonale

$\Rightarrow$ Hiérarchie de problèmes dont le plus simple est en lien avec l'énumération des permutations

Théorèmes annexes

- $$\sum_{\substack{\sigma \in S_n^p \\ desc(\sigma^{-1}) = D}} \frac{q^{maj(\sigma)} - q^{inv(\sigma)}}{1-q} \in \mathbb{N}[q]$$ où S_n^p est l'ensemble des permutations contenant la suite décroissante p et D est l'ensemble des descentes de σ^{-1}
- $stat1(\sigma) = |\{i \mid \exists j \leq i, \sigma(j) \text{ est distingué }, \sigma(j) \leq \sigma(i)\}$ et $stat2(\sigma) = |\sigma| - stat1(\sigma)$ sont des statistiques sur les permutations à sous suite décroissante distinguée et il existe une involution qui les échange.

Avec des symétries, on obtient des bijections avec les permutations (toutes les symétries)
$$\mathbb{P}[\text{support de taille } (n+1)\times(n+1)] = q^{n+1}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} q^{\#\text{inversions de } \sigma}$$
et les permutations à sous suite décroissante distinguée (cas d'une symétrie diagonale)
$$\mathbb{P}[\text{support de taille } (n+1)\times(n+1)] = q^{2n+2}(1-q)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\#\text{sous suites décroissantes de } \sigma) q^{\#\text{inversions de } \sigma}$$

Objectifs sur $\mathbb{Z}^2$

- Identifier un sous groupe fini sur des périodiques
- Comment placer le puits
- Contrôle d'une infinité d'éboulements

Méthodes

Recherche expérimentale :

- Placement du puits à l'infini.
- Limitation à des configurations périodiques $\Rightarrow$ représentation finie
- Éboulements contrôlés pour donner une intuition de déplacement de grains vers une direction privilégiée.

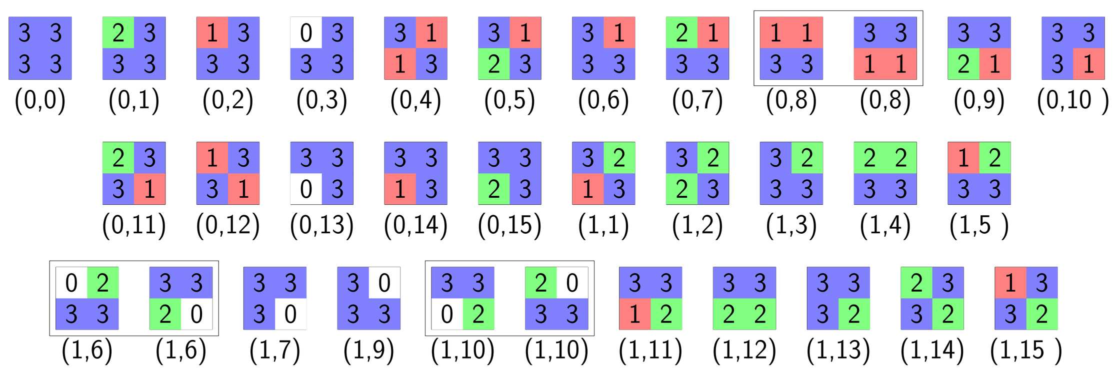


FIGURE – Récurrentes de taille 2×2 avec le puits en $x = -\infty$

Résultats

- Critère de Dhar affaibli $\Rightarrow$ Pour une direction fixée, il existe une transformation injective des recouvrements périodiques sans cycles dans les configurations récurrentes périodiques.

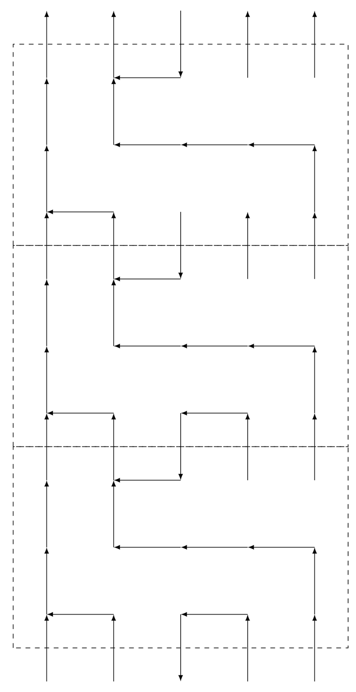


FIGURE – Recouvrement périodique

- Candidat de loi de groupe : somme puis stabilisation en 4 phases
  1. Arrachage de grains vers le puits
  2. Déplacement de grains parallèlement au puits
  3. Éboulements finis sur chaque période
  4. Multiplication de la dimension dans la direction du puits

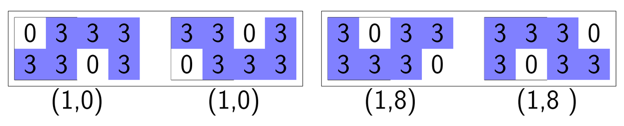


FIGURE – Configurations récurrentes complémentaires pour obtenir $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{16}$

- **Observation** Loi de groupe fini sur les classes d'équivalences par ces opérations pour les tailles $\{2,3,4\}^2$

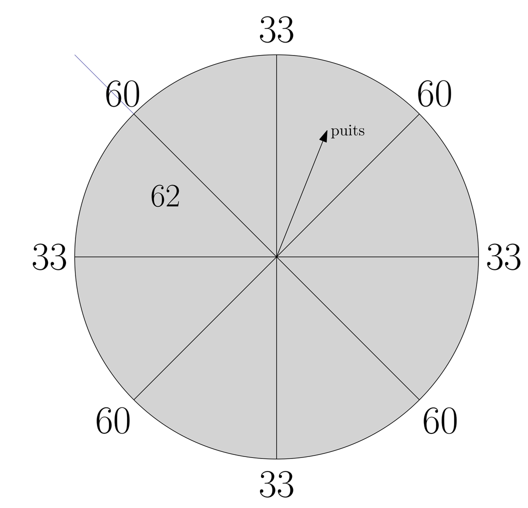
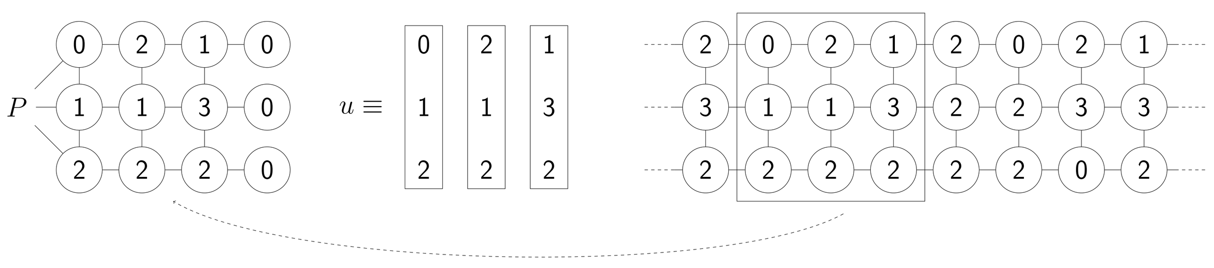


FIGURE – Nombre de récurrentes en fonction de la direction du puits

Automate sur la bande

Que se passe-t-il sur le graphe infini $\mathbf{Z} \times [1, H]$
On approxime la bande par un graphe rectangulaire fini enraciné à gauche.



Une configuration est un mot sur l'alphabet de colonne. On le reconnaît par un automate par une approche proche de celle de Járai et Lyons.

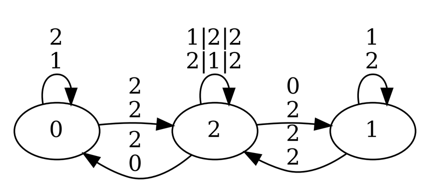
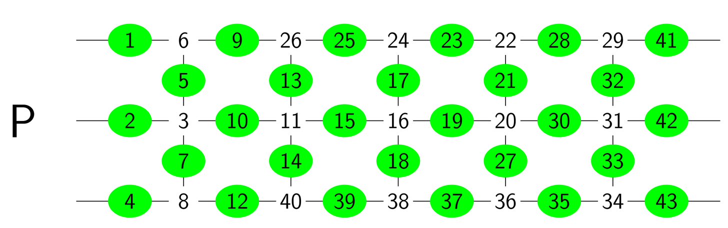


FIGURE – Automate pour la hauteur 2

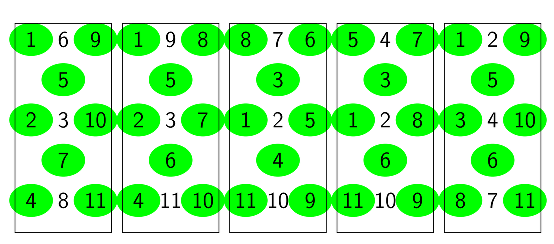
Bijection Cori/Le Borgne (avec les arbres)

Ordre sur les arêtes : de gauche à droite et de haut en bas
Configuration $\leftrightarrow$ Parcours sommets-arêtes

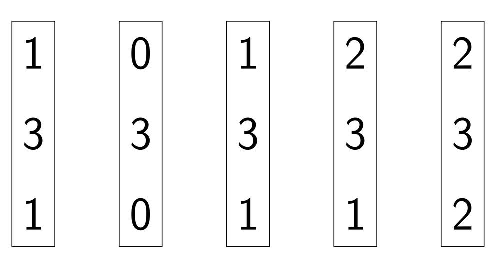
- Ordre de parcours



- Décomposition en sous parcours



- Extraction de la configuration



Automate sur les sous parcours

Transitions décrites par une relation de compatibilité sur les arêtes horizontales.

- ordres des arêtes communes identiques
- horizontale pas avant les extrémités
- horizontale pas après les deux extrémités : l'arête maximale de tout cycle est verticale